

Sadržaj

Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne
greške

Relativna greška

Osobine relativne
greške

Predstavljanje
brojeva

Zaokruživanje
brojeva

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
jedne varijable

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
više varijabli

Određivanje
grešaka
argumenata na
temelju zadane
greške funkcije

Numerička matematika

Račun grešaka

Biserka Draščić Ban

Pomorski fakultet Rijeka

12. prosinca 2019.

Sadržaj

Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne
greške

Relativna greška

Osobine relativne
greške

Predstavljanje
brojeva

Zaokruživanje
brojeva

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
jedne varijable

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
više varijabli

Određivanje
grešaka
argumenata na
temelju zadane
greške funkcije

Sadržaj

1 Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne greške

Relativna greška

Osobine relativne greške

Predstavljanje brojeva

Zaokruživanje brojeva

Greške izračunavanja vrijednosti funkcije jedne varijable

Greške izračunavanja vrijednosti funkcije više varijabli

Određivanje grešaka argumenata na temelju zadane greške funkcije

Račun grešaka

Vrste grešaka:

- 1 **Greške analitičkog odsjecanja** – U numeričkoj matematici nailazimo na takve procese čija bi realizacija trajala beskonačno. U praksi smo prisiljeni prekinuti postupak računanja nakon određenog broja koraka.
- 2 **Početne greške** – Nastaju prilikom opisivanja neke fizikalne pojave zbog (ne)preciznosti mjerenja ulaznih podataka
- 3 **Greške zaokruživanja** – Nastaju kada brojeve sa velikim brojem znamenaka koje najčešće ne stanu u memoriju računala moramo zamijeniti sa približnim brojevima sa manjim brojem znamenaka

Približni brojevi

Definition

Približnim brojem x^* zovemo onaj broj koji se "neznatno" razlikuje od točne vrijednosti x i koji zamjenjuje broj x u izračunavanjima.

Definition

Razlika $e = x - x^*$ zove se **greškom približnog broja** x^* .

Apsolutna greška je $A_x = |e| = |x - x^*|$.

Najčešće broj x ne znamo, pa ne možemo odrediti apsolutnu grešku. Ono što možemo zadati je **granica apsolutne greške** Δ_x

$$A_x \leq \Delta_x,$$

koja je racionalna.

Konvencija kaže da kada imamo gornju granicu apsolutne greške Δ_x , govorimo apsolutna greška.

Osobine apsolutne greške

$\Delta_a, \Delta_b, \dots$ – gornje granice apsolutnih grešaka točnih brojeva $a, b, \dots$ umjesto kojih računamo s njima pridruženim približnim brojevima $a^*, b^*, \dots$

Vrijedi:

1. Neka je $\alpha > 0$ poznata konstanta, nezavisna od a . Tada je $\Delta_{\alpha \cdot a} = |\alpha| \Delta_a$.
2. $\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b$;
3. $\Delta_{a \cdot b} = \Delta_a |b^*| + \Delta_b |a^*|$;
4. $\Delta_{a/b} = \frac{\Delta_a |b^*| + \Delta_b |a^*|}{(b^*)^2}$.

Osobina koja povezuje 1. i 2. (**apsolutna greška linearne kombinacije je linearna kombinacija apsolutnih grešaka**):

$$\Delta_{\alpha a + \beta b} = |\alpha| \Delta_a + |\beta| \Delta_b. \quad (1)$$

Relativna greška

Definition

Relativna greška r približnog broja x^* je količnik greške i točnog broja x (kojeg moramo zamijeniti približnim brojem x^* u računanju)

$$r_x = \frac{e}{x^*},$$

a **apsolutna vrijednost relativne greške** je

$$R_x = \frac{A_x}{|x^*|}.$$

Uobičajeno je reći *relativna greška* za apsolutnu vrijednost relativne greške, te prikazati je u postocima.

Sadržaj

Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne
greške

Relativna greška

Osobine relativne
greške

Predstavljanje
brojeva

Zaokruživanje
brojeva

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
jedne varijable

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
više varijabli

Određivanje
grešaka
argumenata na
temelju zadane
greške funkcije

Definition

Gornja granica apsolutne vrijednost relativne greške R_{x^*} približnog broja x^* je svaki broj δ_x koji nije manji od apsolutne vrijednosti relativne greške tog broja.

$$R_x = \frac{A}{|x^*|} \leq \frac{\Delta_x}{|x^*|} = \delta_x$$

Osobine relativnih grešaka

Sadržaj

Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne greške

Relativna greška

Osobine relativne greške

Predstavljanje brojeva

Zaokruživanje brojeva

Greške

Izračunavanja vrijednosti funkcije jedne varijable

Greške izračunavanja vrijednosti funkcije više varijabli

Određivanje grešaka argumenata na temelju zadane greške funkcije

$\delta_a, \delta_b, \dots$ – gornje granice apsolutnih vrijednosti relativnih grešaka točnih brojeva $a, b, \dots$ umjesto kojih računamo s njima pridruženim približnim brojevima $a^*, b^*, \dots$

Vrijedi:

1. $\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b$.
2. Neka je $\alpha > 0$ poznata konstanta, nezavisna od a . Tada je $\delta_{a^\alpha} = |\alpha| \delta_a$.
3. $\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$;
4. $\delta_{a \pm b} = \frac{|a^*| \delta_a}{|a^* \pm b^*|} + \frac{|b^*| \delta_b}{|a^* \pm b^*|}$.

Sadržaj

Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne
greške

Relativna greška

**Osobine relativne
greške**

Predstavljanje
brojeva

Zaokruživanje
brojeva

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
jedne varijable

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
više varijabli

Određivanje
grešaka
argumenata na
temelju zadane
greške funkcije

Zaključak: za grešku zbroja i razlike zadužena je apsolutna, a za grešku produkta, kvocijenta i potencije relativna greška:

$$\Delta_{a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_r} = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \dots + \Delta_{a_r},$$

$$\Delta_{a_1^{\pm 1} a_2^{\pm 1} \dots a_r^{\pm 1}} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_r}.$$

Predstavljanje brojeva

Svaki realan broj x možemo napisati u obliku:

$$x = \pm (\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \dots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \dots).$$

Predstavljanje brojeva

Definition

Znamenka α_i je **značajna znamenka** približnog broja x^* ako je:

- $\alpha_i \neq 0$,
- Ako je $\alpha_i = 0$ i ako se nalazi između znamenaka različitih od 0,
- $\alpha_i = 0$ i ako čuva dekadsku jedinicu na čijem se mjestu nalazi.

Definition

Značajna znamenka α_k približnog broja x^* je **sigurna znamenka** ako je

$$A_x \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad 0 < \omega \leq 1.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ su **sigurne u užem smislu** ako je $\omega = \frac{1}{2}$, a u **širem smislu** ako je $\omega = 1$.

Zaokruživanje brojeva

Sadržaj

Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne
greške

Relativna greška

Osobine relativne
greške

Predstavljanje
brojeva

**Zaokruživanje
brojeva**

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
jedne varijable

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
više varijabli

Određivanje
grešaka
argumenata na
temelju zadane
greške funkcije

1 Postepeno zaokruživanje:

- 1 Ako je znamenka koju odbacujemo manja od 5, onda znamenke koje ostaju ne mijenjaju se.
- 2 Ako je znamenka koju odbacujemo veća od 5, onda posljednju znamenku koju ostavljamo uvećamo za 1.

2 Direktno zaokruživanje:

- 1 Ako je prva od znamenaka koje odbacujemo 5, a ostale iza nje nisu sve nule, onda posljednju zadržanu znamenku uvećamo za 1.
- 2 Ako je prva od znamenaka koje odbacujemo 5, a ostale iza nje su sve nule, onda ako je posljednja zadržana znamenka parna, ne mijenjamo ju, a ako je posljednja zadržana znamenka neparna, uvećamo ju za 1.

Greške izračunavanja vrijednosti funkcije jedne varijable

Neka je $y = f(x)$ zadana funkcija, Δ_x apsolutna greška argumenta, koji zaokružujemo na $x \approx x^*$. Pretpostavimo da je funkcija derivabilna u nekoj okolini x^* , koja sadrži i x . Tada je **apsolutna greška funkcije**

$$\Delta_y = |f'(x^*)| \Delta_x, \quad (2)$$

a relativna greška funkcije

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|f(x^*)|} = \frac{|f'(x^*)|}{|f(x^*)|} \cdot \Delta_x = |[\ln f(x^*)]'| \Delta_x. \quad (3)$$

Inverzna zadaća izračunavanja vrijednosti funkcije

Pretpostavimo da je $f \in C^1$, tj. da je f diferencijabilna u intervalu koji sadrži x, x^* i neka točka $(x^*, f(x^*))$ nije točka ekstrema. Tada obrat formule (2) postaje

$$\Delta_x = \frac{\Delta_y}{|f'(x^*)|}, \quad (4)$$

tj. za zadanu grešku funkcije nalazimo potrebnu točnost izračunavanja, mjerenja, odnosno određivanja vrijednosti argumenta.

Greške izračunavanja vrijednosti funkcije više varijabli

Promatramo realnu funkciju više realnih varijabli $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, tj. $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, koja je derivabilna barem jednom po svakom svom argumentu x_j . Tada je **gornja granica apsolutne greške vrijednosti funkcije**

$$\Delta_y = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j}, \quad (5)$$

dok je **gornja granica apsolutne vrijednosti relativne greške vrijednosti funkcije**

$$\delta_y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(\mathbf{x}^*)} \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j} = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j}.$$

Određivanje grešaka argumenata na temelju zadane greške funkcije

- 1 Metoda proporcionalnih utjecaja
- 2 Metoda jednakih utjecaja

Metoda proporcionalnih utjecaja

Sadržaj

Račun grešaka

Približni brojevi

Osobine apsolutne
greške

Relativna greška

Osobine relativne
greške

Predstavljanje
brojeva

Zaokruživanje
brojeva

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
jedne varijable

Greške
izračunavanja
vrijednosti funkcije
više varijabli

Određivanje
grešaka
argumenata na
temelju zadane
greške funkcije

U matematičkom modelu izračunavanja vrijednosti funkcije $y = f(\mathbf{x}^*)$ koji zadovoljava uvjete relacije (5) uz zadani nivo apsolutne greške funkcije Δ_y pretpostavljamo međutjecaje varijabli:

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} : \dots : \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right| \Delta_{x_n} = k_1 : \dots : k_n; \quad k_j > 0, j = \overline{1, n} \quad (6)$$

tada je

$$\Delta_{x_j} = \frac{k_j \Delta_y}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \sum_{j=1}^n k_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Metoda jednakih utjecaja

Ako su za funkciju više varijabli svi utjecaji argumenata, barem približno, jednaki, tj. $\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j} = 1$ tada iz (7) neposredno slijedi

$$\Delta_{x_j} = \frac{\Delta_y}{n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right|} \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$