

Sadržaj

Numeričko
rješavanje
jednadžbi

Metoda polovljenja

Metoda sekante

Metoda tangente
(Newtonova
metoda)

Metoda iteracije

Općenito o
greškama metoda
rješavanja
jednadžbi

Numerička matematika

Numeričko rješavanje jednadžbi

Biserka Draščić Ban

Pomorski fakultet Rijeka

21. siječnja 2020.

Sadržaj

Numeričko
rješavanje
jednadžbi

Metoda polovljenja

Metoda sekante

Metoda tangente
(Newtonova
metoda)

Metoda iteracije

Općenito o
greškama metoda
rješavanja
jednadžbi

Sadržaj

1 Numeričko rješavanje jednadžbi

Metoda polovljenja

Metoda sekante

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Metoda iteracije

Općenito o greškama metoda rješavanja jednadžbi

Numeričko rješavanje jednadžbi

Neka je zadana jednadžba $f(x) = 0$, gdje je funkcija definirana i neprekidna na nekom (konačnom) segmentu $[a, b]$.

U situacijama kada ne možemo analitički riješiti zadanu jednadžbu koristimo se jednom od metoda za numeričko (približno) rješavanje jednadžbi.

Metoda polovljenja

Neka je $f \in C[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ i neka je

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Bolzanov teorem garantira egzistenciju nekog $c \in (a, b)$ da je $f(c) = 0$. Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

odmah dobijemo da je $c = \frac{a+b}{2}$ traženo rješenje.

No, ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$$

bira se onaj od segmenata

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

u čijim krajevima funkcija f ima suprotan predznak. Taj interval neka je $[a_1, b_1]$. Ponavljanjem postupka dobiva se niz segmenata

$$[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

sa svojstvom da je

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0,$$

i

$$\xi_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Greška metode $\epsilon > 0$ nakon n polovljenja mora biti

$$\epsilon < \frac{b - a}{2^n},$$

što je istovremeno i kriterij izlaska iz iteracijske petlje polovljenja.

Metoda sekante

Promatramo funkciju $y = f(x)$ na intervalu $x \in [a, b]$ takvom da je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Na tom intervalu tražimo njenu nultočku, tj. rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$.

Razlikujemo dva slučaja, u ovisnosti o tome u kojem je rubu intervala funkcijska vrijednost veća od nule.

U oba slučaja pretpostavimo da vrijedi:

$$f \in C^2[a, b], \quad f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \text{i} \quad f', f'' \text{ su konstantnog znaka na } [a, b].$$

U oba slučaja povlačimo sekantu funkcije kroz točke $f(a)$ i $f(b)$.

Sjечиšte sekante sa $0x$ -osi x_1 je prva aproksimacija korjena jednadžbe.

Ako je $f(x_1) = 0$, našli smo rješenje.

Ako je $f(x_1) \neq 0$, postupak nastavimo spajajući sekantom $f(x_1)$ sa $f(a)$, odnosno sa $f(b)$.

Sadržaj

Numeričko rješavanje jednadžbi

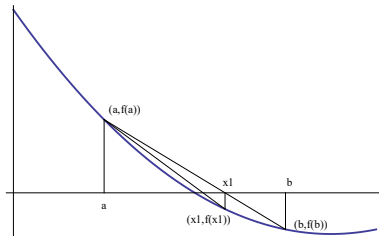
Metoda polovljenja

Metoda sekante

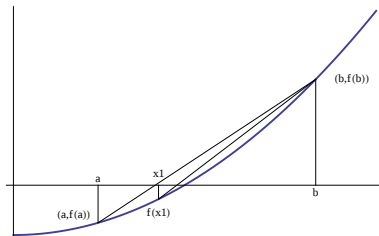
Metoda tangente
(Newtonova
metoda)

Metoda iteracije

Općenito o
greškama metoda
rješavanja
jednadžbi



Slika: $f(a) > 0$



Slika: $f(a) < 0$

Ako je $f(a) > 0$ (slika 1), tada korijen jednadžbe $f(x) = 0$ računamo po rekurzivnoj formuli:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \quad (1)$$

a za početnu aproksimaciju uzimamo $x_0 = b$.

Kada je $f(a) < 0$ (slika 2), tada korijen jednadžbe $f(x) = 0$ nalazimo iterativno po rekursivnoj formuli:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \quad (2)$$

dok je početna aproksimacija $x_0 = a$.

U oba slučaja greška je:

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{[a,b]} |f'(x)|}. \quad (3)$$

Theorem

Neka je $f \in C^2[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$; f' , f'' su konstantnog znaka na $[a, b]$. Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c, \quad (4)$$

i c je jedinstveno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. Niz (x_n) je rekurzivno definiran preko

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} & f(a) > 0 \\ x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} & f(a) < 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Pretpostavimo da za funkciju f vrijedi $f \in C^2[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$ i da su f' , f'' konstantnog znaka na $[a, b]$.

Zadaća nam je naći nultočku c funkcije $f(x)$ unutar (a, b) (egzistenciju jedinstvene nultočke garantira Bolzanov teorem).

Postavljamo tangentu na luk funkcije $y = f(x)$ u onom kraju intervala $[a, b]$ za koji vrijedi $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, x_0 \in \{a, b\}$.

Jednadžba tangente na funkciju u točki $T_0(x_0, f(x_0))$ je

$$(t): \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nalazimo sjecište x_1 tangente (t) s Ox -osi:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ako je $f(x_1) = 0$, našli smo korijen jednadžbe. Ako nije postavljamo novu tangentu u točki $T_1(x_1, f(x_1))$ i ponovimo postupak. Nakon n koraka dobivamo rekuzivnu formulu za aproksimaciju korijena:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Theorem

Neka je $f \in C^2[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i neka su f', f'' konstantnog znaka na intervalu $[a, b]$. Definiramo niz $(x_n)_{\mathbb{N}_0}$ rekursivnom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in \{a, b\}: f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (6)$$

Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c, \quad (7)$$

gdje je $c \in (a, b)$ jedinstveno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, tj. $f(c) = 0$.

Metoda iteracije

Pretpostavimo da je $f \in C[a, b]$ i da je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Na osnovu teorema Bolzana zagarantirano je barem jedno rješenje $c \in (a, b)$ jednadžbe $f(x) = 0$.

Zamijenimo je ekvivalentnom jednadžbom

$$x = \varphi(x). \quad (8)$$

Funkciju $\varphi(x)$ zovemo **iterativna funkcija**.

Uzimamo na sreću nultu aproksimaciju rješenja x_0 i zamijenimo je u desnu stranu pomoćne jednadžbe (8). Dobivamo

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Ponavljajući ovaj postupak dolazimo do

$$x_2 = \varphi(x_1),$$

sve dok ne odredimo tzv. *iterativni niz* brojeva

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Ako ovaj niz brojeva (x_n) konvergira, označimo njenu graničnu vrijednost s $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma$, i iz neprekidnosti f i (9) zaključujemo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = \varphi(\gamma). \quad (10)$$

Stoga je γ također rješenje polazne jednadžbe, koje se preko numeričkog postupka (9) može odrediti s željenom točnošću.

Theorem

Neka je $f \in C^1[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada, ako postoji $q \in (0, 1)$ da je

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad x \in (a, b) \quad (11)$$

tada proces

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

konvergira bez obzira na izbor početne vrijednosti $x_0 \in [a, b]$, i

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (13)$$

je jedinstveno rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$.

Općenito o greškama metoda rješavanja jednadžbi

U metodama izračunavanja nultočki jednadžbi oblika $f(x) = 0$ udobno je koristiti bliskost uzastopnih iteracija $|x_n - x_{n-1}|$, naročito ako se ta razlika smanji ispod određene zadane razine točnosti $\epsilon > 0$. No, iako je $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, ne preporučavamo poistovjećivanje $c \approx x_n$, gdje je c traženo rješenje, tj. $f(c) = 0$.

Zato tražimo efikasniju procjenu razlike pravog rješenja c , $f(c) = 0$ i nekog približnog rješenja x_n . U tome nam pomažu sljedeće procjene.

Theorem

*Neka je $f \in C^1[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$ i neka je $c \in (a, b)$ rješenje
jednadžbe $f(x) = 0$. Ako je $x_n \in (a, b)$ tada je*

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|. \quad (14)$$

DOKAZ. Promatramo razliku $|f(x_n)| = |f(x_n) - f(c)|$. Na osnovu
Lagrangeovog teorema o diferencijalnoj srednjoj vrijednosti je

$$|f(x_n) - f(c)| = |f'(\eta)| |x_n - c| \geq |x_n - c| \cdot \min_{\eta \in [a, b]} |f'(\eta)| = m_1 |x_n - c|,$$

odakle već slijedi tvrdnja (14), jer je ili $\eta \in (x_n, c)$ ili $\eta \in (c, x_n)$. $\square$

Theorem

U metodi tangente vrijedi

$$|x_n - c| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|. \quad (15)$$

DOKAZ. Na osnovu Taylorovog razvoja funkcije $f(x)$ u okolini
točke $x = x_n$ vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = f(x_{n-1}) \\ &\quad + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x_n - c)^2, \end{aligned} \quad (16)$$

gdje je $\zeta \in (x_{n-1}, x_n)$ ili $\zeta \in (x_n, x_{n-1})$. Na osnovu iterativne
formule (6) metode tangente je

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

što relaciju (16), preko nejednakosti trokuta, prevodi u

$$|f(x_n)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)|}{2} \cdot (x_n - x_{n-1})^2.$$

Primijenimo na potonji izraz rezultat prethodnog teorema (14) i
odmah dobivamo tvrdnju (15). $\square$

Sada vidimo da uz određen uvjet - ograničen modul druge derivacije funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ - bliskost uzastopnih derivacija IPAK znači prestanak računanja daljnjih iteracija. Dakle,

$$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2m_1 \epsilon}{M_2}}$$

povlači da je

$$|x_n - c| \leq \epsilon,$$

što za dovoljno malo ϵ već može biti ispod zadanog praga greške.

Theorem

Neka je

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < \infty \quad x \in [a, b].$$

U metodi sekante tada vrijedi

$$|x_n - c| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|. \quad (17)$$

Metode sekante i tangente trebaju i uvjet da niti prva, niti druga derivacija funkcije kojoj tražimo nulište, se ne smije anulirati unutar intervala $[a, b]$. Dakle, obje vrijednosti m_1, m_2 su pozitivne i gornje granice (14), (15) i (17) su dobro definirane.