

SVEUČILIŠTE U RIJECI
POMORSKI FAKULTET U RIJECI

BISERKA DRAŠČIĆ BAN, TIBOR POGANJ

PRIMIJENJENA MATEMATIKA

Autorizirana predavanja i vježbe

Rijeka, 2009.

Sadržaj

Poglavlje 1. Kombinatorika	5
1. Permutacije	5
2. Kombinacije	6
3. Varijacije	7
4. Zadaci	8
Poglavlje 2. Vjerojatnost	13
1. Prostor elementarnih događaja. σ - polje događaja	13
2. Aksiomatika vjerojatnosti. Osobine vjerojatnosti. Geometrijska vjerojatnost	15
3. Uvjetna vjerojatnost	21
4. Slučajne varijable	26
5. Numeričke karakteristike slučajnih varijabli	46
Poglavlje 3. Numerička matematika	55
1. Račun grešaka	55
2. Interpolacija	65
3. Numeričko rješavanje jednadžbi	77
4. Numeričko integriranje	91
Bibliografija	97

POGLAVLJE 1

Kombinatorika

1. Permutacije

Ako se zadani elementi skupa razmještaju tako da se dobiju različite skupine od kojih svaka sadrži sve zadane elemente, taj postupak se naziva *permutiranje*. Permutirati znači zadane elemente spajati u skupine na sve moguće načine tako da svaka skupina sadrži sve zadane elemente.

DEFINICIJA 1. *Permutacije su skupine elemenata koje sadrže sve elemente zadanog skupa po jedan ili više puta i koje se međusobno razlikuju po rasporedu elemenata.*

Od jedne permutacije dobiva se bilo koja druga permutacija razmještanjem, odnosno permutiranjem njezinih članova.

Broj mogućih permutacija od n zadanih elemenata ovisni o tome jesu li u skupu svi elementi različiti ili su neki od njih jednaki.

1.1. Permutacije bez ponavljanja. Ako su svi elementi u skupu različiti, permutiranjem se dobivaju tzv. *permutacije bez ponavljanja*. Za skup od n elemenata ukupan broj različitih permutacija je

$$P_{(n)} = P_{(n-1)} \cdot n, \quad (1)$$

odnosno

$$P_{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n = n! \quad (2)$$

gdje se umnožak prvih n prirodnih brojeva zove *faktorijel*, a po definiciji se uvodi da je $0! = 1$.

1.2. Stirlingova formula. Pri računanju vrijednosti faktorijela javlja se problem kada je n velik broj. Na primjer **CASIO fx – 991** džepni kalkulator izračunava $69! \approx 1.711 \cdot 10^{98}$, dok $70!$ piše kao $-E-$. U tom slučaju vrijednost $n!$ može se približno odrediti *Stirlingovom formulom*:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} \cdot e^{\frac{\theta(n)}{12n}}, \quad |\theta(n)| < 1,$$

što mi primjenjujemo za n dovoljno veliko u obliku

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}. \quad (3)$$

1.3. Permutacije s ponavljanjem. Ako iz zadanog skupa od n različitih elemenata prvi element biramo r_1 , drugi $r_2 \cdots$, n -ti r_n puta, tada permutirajući svih $N = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ elemenata dobivamo *permutacije s ponavljanjem* r_1, r_2, \cdots, r_n -tog reda od N elemenata. Broj različitih permutacija koje se mogu formirati od tih N zadanih elemenata je:

$$P_{(r_1, r_2, \dots, r_n; N)} = \frac{N!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}. \quad (4)$$

2. Kombinacije

Postupak kojim se iz skupa od n zadanih elemenata formiraju podskupovi od r elemenata ($r \leq n$) zove se *kombiniranje*, a podskupovi koji se dobiju zovu se *kombinacije*.

DEFINICIJA 2. **Kombinacije** r -tog reda od n elemenata su r -člani podskupovi zadanog skupa elemenata.

U kombinaciji nije bitan raspored elemenata već sama prisutnost elementa, što znači da su ab i ba ista kombinacija.

Ako se u jednoj kombinaciji isti element javlja samo jedanput, to imamo kombinacije bez ponavljanja, inače je riječ o kombinacijama s ponavljanjem.

2.1. Kombinacije bez ponavljanja.

DEFINICIJA 3. **Kombinacije bez ponavljanja** r -tog reda su r -člani podskupovi zadanog skupa od n elemenata u kojima se isti element pojavljuje samo jedanput.

Ukupan broj kombinacija r -tog reda od n elemenata iznosi:

$$K_{r(n)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} \quad 0 \leq r \leq n. \quad (5)$$

2.2. Kombinacije s ponavljanjem. Kod kombinacija s ponavljanjem broj elemenata u podskupu može biti manji, jednak ili veći od broja zadanih elemenata ($r \geq n$). Pretpostavka je da se praktično radi o neograničenom ponavljanju, što znači da se isti element u podskupu r -tog reda može pojaviti r puta.

Broj kombinacija s ponavljanjem r -tog reda od n zadanih elemenata jednak je broju kombinacija r -tog reda bez ponavljanja od $(n + r - 1)$ elemenata:

$$K_{r(n)}^p = K_{r(n+r-1)} = \binom{n+r-1}{r}. \quad (6)$$

3. Varijacije

Ako se u skupu svih mogućih kombinacija r -tog reda od n zadanih elemenata permutiraju elementi svake kombinacije (na sve moguće načine), dobiju se varijacije r -tog reda od n elemenata. Dakle, varijacije su permutirane kombinacije.

DEFINICIJA 4. *Varijacije su skupine određenog broja elemenata odabranih iz skupa od n elemenata razmještenih na sve moguće načine.*

Za razliku od kombinacija, kod varijacija je bitno i mjesto elementa u skupini, redoslijed nizanjanja elemenata u varijaciju, a ne samo prisutnost.

3.1. Varijacije bez ponavljanja. Varijacije bez ponavljanja dobivaju se tako da se najprije formiraju sve kombinacije r -tog reda bez ponavljanja, kojih ima $\binom{n}{r}$, a zatim se svaka kombinacija permutira na $r!$ načina. Stoga je broj mogućih varijacija r -tog reda od n elemenata jednak:

$$V_{r(n)} = K_{r(n)} \cdot P_{(r)} = \binom{n}{r} \cdot r! = n(n-1) \cdots (n-r+1). \quad (7)$$

3.2. Varijacije s ponavljanjem. Kod varijacija s ponavljanjem svaki se element u varijaciji r -tog reda može pojaviti r puta. Od svakog od zadanih n elemenata može se formirati jedna varijacija prvog reda: $a_1 a_2 \dots a_n$, pa je $V_{1(n)}^p = n$. Broj varijacija druge klase s ponavljanjem dobiva se kada se svakoj varijaciji prve klase s lijeve strane doda jedan od n elemenata pa se ukupno javlja n redaka varijacija, a u svakom retku n varijacija drugog reda s ponavljanjem, $V_{2(n)}^p = n^2$. Analogno,

broj varijacija r -tog reda s ponavljanjem od n elemenata je:

$$V_{r(n)}^p = n^r. \quad (8)$$

4. Zadaci

ZADATAK 4.1. *Na koliko se načina mogu rasporediti četiri osobe na četiri dužnosti u upravi nekog kluba?*

Za dodjelu prve dužnosti imamo na raspolaganju četiri osobe, što znači da prvu dužnost možemo dodijeliti na 4 načina. Za drugu dužnost nam preostaju tri osobe, stoga ju možemo dodijeliti na 3 načina. Za treću imamo na raspolaganju dvije osobe, što nam daje 2 načina raspodjele i, napokon, za četvrtu dužnost nam preostaje posljednja osoba, što nam daje samo 1 način raspodjele.

Dakle, ukupan broj rasporeda je

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24 \quad (\text{permutacije bez ponavljanja}).$$

ZADATAK 4.2. *Na koliko načina možemo presložiti slova riječi BAOBAB?*

Na raspolaganju imamo 2 slova A, 3 slova B i 1 slovo O. Ukupno imamo 6 slova. S obzirom da slova moramo presložiti, a neka od njih se ponavljaju, radi se o permutacijama s ponavljanjem. Dakle, slova riječi BAOBAB možemo presložiti na

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$$

načina.

ZADATAK 4.3. *Koliko riječi od 5 slova (anagrama) možemo sastaviti od slova a, e, i, o, u ako:*

- a) *se niti jedno slovo ne ponavlja?*
- b) *se slova mogu neograničeno ponavljati?*
- c) *u slučaju b) koliko ih može počinjati s o i istovremeno završavati sa u?*

- a) Ovdje trebamo 5 slova razmjestiti na 5 pozicija u riječi. Kako se slova ne smiju ponavljati, za prvu poziciju imamo na raspolaganju 5 slova, za drugu 4, za treću 3, za četvrtu 2 i za petu 1, što nam daje ukupno

$$P_{(5)} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

riječi.

- b) U ovom slučaju na svaku poziciju u riječi možemo staviti svako slovo. Dakle, za prvu imamo na raspolaganju 5 slova, kao i za drugu, treću, četvrtu i petu, što nam daje da je ukupan broj riječi

$$V_{5(5)}^p = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125.$$

- c) Prvo slovo mora biti *o*, a posljednje *u*, stoga nam preostaju tri pozicije za razmještaj ostalih slova. Kako se slova opet mogu ponavljati, za svaku od te tri pozicije imamo 5 slova na raspolaganju. dakle, traženi broj riječi je

$$V_{3(5)}^p = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

ZADATAK 4.4. *Koliko je najveći mogući broj telefonskih brojeva s 5 znamenki ako niti jedan telefonski broj ne počinje nulom ni brojem većim od 6?*

Znamenke koje nam mogu biti na prvoj poziciji dolaze iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dok znamenke na ostalih 4 mjesta u telefonskom broju mogu biti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Prvi skup ima 6 elemenata, drugi 10. Kako se u telefonskom broju znamenke mogu ponavljati, na prvu poziciju može doći bilo koji broj iz skupa od 6 elemenata, a na ostale 4 bilo koji broj iz skupa od 10 elemenata. Dakle, traženi broj telefonskih brojeva je

$$6 \cdot 10^4 = 60000.$$

ZADATAK 4.5. *Na koliko se načina može sastaviti košarkaški tim od 8 igrača, ako u igri sudjeluje 5 igrača i ako:*

- a) *položaj svakog igrača nije bitan?*
 b) *položaj svakog igrača je bitan?*
- a) Od 8 igrača trebamo sastaviti podskup od 5 osoba, poredak nam nije bitan. Dakle, imamo kombinacije. Traženi broj timova je

$$K_{5(8)} = \binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56.$$

- b) Sada nam je poredak bitan, dakle imamo permutirane kombinacije, odnosno varijacije. Tada je broj timova

$$V_{5(8)} = \binom{8}{5} \cdot 5! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720.$$

ZADATAK 4.6. *Od 32 karte igrač dobiva 10 karata.*

- a) *Na koliko načina je to moguće?*

b) *Na koliko načina je moguće dobiti (u 10 karata) 2 pika, 2 kara, 5 herca i 1 tref?*

a) Dijeljenje igraču 10 karata od 32 ekvivalentno je formiranju 10 elementnog podskupa skupa od 32 elementa. Dakle, radi se o kombinacijama i traženi broj mogućih podjela karata je

$$\binom{32}{10} = 64512240.$$

b) Sada razlikujemo boje karata kao skupove čije podskupove tražimo. U špilju od 32 karte imamo 4 boje, u svakoj boji po 8 karata. Dakle, 2 pika možemo izabrati na $\binom{8}{2}$ načina, 2 karoa na $\binom{8}{2}$ načina, 5 herca na $\binom{8}{5}$ i 1 tref na $\binom{8}{1}$ načina. To nam daje ukupno

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{8}{5} \cdot \binom{8}{1} = 43904$$

načina.

ZADATAK 4.7. *Na tulumu se okupilo 20 dečki i 20 djevojaka. No 5 djevojaka ne želi plesati. Na koliko načina se mogu preostali gosti "posložiti" u plesne parove?*

Kako 5 djevojaka ne želi plesati, preostaje nam 20 dečki i 15 djevojaka raspoloženi za ples. Kako djevojaka ima manje, dodijelimo im plesne partnere.

1. djevojci možemo izabrati mladića na 20 načina
2. djevojci možemo izabrati mladića na 19 načina (jedan je već zauzet)
-
15. djevojci možemo izabrati mladića na 6 načina (14 ih je zauzeto)

Dakle, imamo $20 \cdot 19 \cdot 18 \dots 7 \cdot 6 \approx 2,027 \cdot 10^{16}$ parova.

4.1. Newtonova binomna formula. Potenciranje binoma prirodni brojem apsolvirano je u Matematici 1, kada je dokazana formula

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Ova formula poznata je pod imenom Newtonov binomni poučak, binomna formula ili nekakav treći sinonim. Izbor $a = p, b = 1 - p$ omogućuje formulu

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} = 1, \quad (10)$$

koja je za $p \in (0, 1)$ u uskoj vezi s Bernoullijevom shemom i binomnom razdiobom vjerojatnosti - vidi poglavlje 4.1.

Kada je potencija binoma $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, tj. α nije prirodan broj, tada konačna suma (9) postaje binomni red:

$$(a+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^{\alpha-n} x^n, \quad (11)$$

koji konvergira za svako $|x/a| < 1$. Ovdje je

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

poopćeni binomni koeficijent za koji vrijede sljedeće osobine:

1. $\binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-n}{n+1}$;
2. $\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$,

gdje je $\alpha \in \mathbb{C}$.

4.2. Polinomijalna formula. Ako potenciramo algebarski r -član prirodnim brojem n dobivamo sljedeću formulu:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_r \leq n \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_r = n}} \frac{n!}{j_1! j_2! \cdots j_r!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_r^{j_r}. \quad (12)$$

POGLAVLJE 2

Vjerojatnost

1. Prostor elementarnih događaja. σ - polje događaja

U aksiomatskoj definiciji teorije vjerojatnosti osnovni pojam izgradnje teorije je *elementaran događaj, ishod*. Naime, prilikom izvođenja nekog eksperimenta A , svi mogući ishodi su elementarni događaji. Označavamo ih s ω , dok je skup svih mogućih elementarnih ishoda $\Omega := \{\omega\}$ koji se pojavljuju u vezi sa spomenutim eksperimentom A je *prostor elementarnih događaja*. Podskupove Ω nazivamo *slučajnim događajima*. Tako je $B \subset \Omega$ skup svih ω koji definiraju B , što znači da se B realizira ako se realizira bar jedno ω koji pripada B . Prostor elementarnih događaja Ω je *siguran, izvjestan događaj*, dok je \emptyset , trivijalan podskup od Ω *nemoguć događaj*.

U zadanom prostoru elementarnih događaja Ω promatramo podskupove, slučajne događaje A, B, C, \dots . Zapis $\omega \in A$, $\omega \notin A$ označava da elementarni događaj ω pripada, tj. ne pripada događaju A . Također, $A \subset B$, $C \subseteq D$ označava da je događaj A sadržan u događaju B , drugim riječima svaki $\omega \in A$ je ujedno u B , ali B ima barem jedan element $z \notin A$, odnosno, C je sadržan u D . Događaji A, B su jednaki, ako za njih vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Unija slučajnih događaja A, B je slučajan događaj $A \cup B$, koji sadrži sve ω koji su u bar jednom od A ili B . Ako A, B nemaju zajedničke elemente, unija prelazi u *sumu događaja* $A + B$. Unija $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ proizvoljnog broja događaja A_{α} sastoji se iz svih ω koji su u barem jednom od događaja A_{α} .

Razlika (diferencija) događaja A, B je slučajan događaj $A \setminus B$, koji se sastoji iz svih ω koji su u A i istovremeno nisu u B .

Simetrična diferencija događaja A, B je događaj $A \circ B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Presjek, produkt slučajnih događaja A, B je događaj $A \cap B$, $A \cdot B$ koji se sastoji iz svih ω koji pripadaju istovremeno i A i B . Presjek $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ proizvoljnog broja događaja A_{α} sastoji se iz svih ω koji su u svakom

događaju A_α . Događaji A, B su disjunktni ako nemaju niti jedan zajednički elementaran događaj, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$. Ovdje napominjemo da za uniju proizvoljnog broja disjunktnih slučajnih događaja umjesto $\bigcup_\alpha A_\alpha$ pišemo $\sum_\alpha A_\alpha$.

Komplement, dopuna slučajnog događaja A u odnosu na neki zadani širi događaj $B \supseteq A$ je slučajni događaj $A_B^c, A'_B, \bar{A}_B, \mathfrak{C}(A)_B$ koji sadrži sve one ω iz B , koji nisu u A . Ako je $B = \Omega$, tada indeks B ne pišemo, tj. oznaka komplementa u tom slučaju je $A^c, A', \bar{A}, \mathfrak{C}(A)$.

Budući da je skupovni koncept na snazi u objašnjavanju slučajnih događaja i njihovih međusobnih relacija, napominjemo da za slučajne događaje vrijede svi skupovni identiteti, na primjer jedan od De Morganovih zakona $\mathfrak{C}(A \cup B) = \mathfrak{C}(A) \cap \mathfrak{C}(B)$. Kako, nadalje, vrijedi i *teorem dualnosti teorije skupova*, po kojem ako imamo događajni identitet, zamjenom $\cup \leftrightarrow \cap$ dobivamo novi identitet; tako nastaje, na primjer, drugi identitet u paru De Morganovih zakona $\mathfrak{C}(A \cap B) = \mathfrak{C}(A) \cup \mathfrak{C}(B)$. Nije teško uvidjeti da skup slučajnih događaja, jedna binarna skupovna operacija (uglavnom se uzimaju \cup ili \cap), te unarna operacija komplementa čine tzv. Booleovu algebru slučajnih događaja. No kod aksiomatizacije teorije vjerojatnosti koja se koristi i danas, Andrei Nikolaevič Kolmogorov u svojoj antologijskoj monografiji *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer Verlag, New York 1933., koristi jedan drugi koncept, a to je skupovna/događajna σ -algebra.

Na primjer, sva složenost nekih slučajnih događaja koji se mogu formirati nad nekim zadanim prostorom elementarnih događaja vidi se iz sljedećeg. Zadan je niz slučajnih događaja A_1, A_2, \dots . Neka je B događaj "beskonačno mnogo A - ova se realizira". Tada je B ω -skup

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \right), \quad (13)$$

jer $\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$ se realizira ako i samo ako se barem jedan od A_j, A_{j+1}, \dots realizira. I tako za svako $j \in \mathbb{N}$.

DEFINICIJA 5. *Zadan je prostor elementarnih događaja Ω . Familija \mathfrak{F} podskupova Ω je σ -algebra (polje), ako su na snazi sljedeći aksiomi:*

- A1. $\Omega \in \mathfrak{F}$;
- A2. $A \in \mathfrak{F}$ povlači $A^c \in \mathfrak{F}$;
- A3. ako je $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$, onda $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{F}$.

Nije teško uvidjeti da su i sljedeći složeni slučajni događaji sadržani u σ -algebri \mathfrak{F} , ako su njihove sastavnice - slučajni događaji u \mathfrak{F} :

\emptyset , $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, $\bigcup_{j=1}^m A_j$, $\bigcap_{j=1}^m A_j$ itd. Na primjer konačna unija dobiva se iz A3. sa sljedećom specifikacijom: $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = \emptyset$, dok je konačan presjek posljedica primjene De Morganove formule na konačnu uniju, gdje umjesto A_j uzimamo $\mathcal{C}(A_j)$.

Često se srećemo s klasom \mathcal{S} svih poluotvorenih paralelepipeda $[a, b) = \times_{j=1}^d [a_j, b_j)$ u d - dimenzionalnom realnom Euklidskom prostoru \mathbb{R}^d i presjekom svih σ - polja koja ju sadrže. Taj presjek je *Borelovo* σ - polje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

2. Aksiomatika vjerojatnosti. Osobine vjerojatnosti. Geometrijska vjerojatnost

Vjerojatnost se zasniva u modernom aksiomatskom (Kolmogorovljevom) smislu kao funkcija. Njene ranije definicije (klasična - jednako-vjerojatni ishodi, statistička) su specijalni slučajevi definicije koju sada navodimo.

DEFINICIJA 6. *Vjerojatnost* P je funkcija $P : \mathfrak{F} \mapsto \mathbb{R}$ s osobinama:

- K1. $P(\Omega) = 1$, NORMIRANOST;
- K2. za svako $A \in \mathfrak{F}$ vrijedi $P(A) \geq 0$, NENEGATIVNOST;
- K3. ako su $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ disjunktne, tj. $A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k$
onda $P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, σ - ADITIVNOST.

Iz aksioma K1-3. slijede sljedeće osobine vjerojatnosti:

- (1) $P(\emptyset) = 0$;
- (2) KONAČNA ADITIVNOST DISJUNKTNIH A_1, \dots, A_n :
 $P\left(\sum_{j=1}^m A_j\right) = \sum_{j=1}^m P(A_j)$;
- (3) MONOTONOST: ako je $A \subset B$, onda $P(A) \leq P(B)$;
- (4) $0 \leq P(A) \leq 1$, za svako $A \in \mathfrak{F}$;
- (5) $P(\mathcal{C}(A)) = 1 - P(A)$;
- (6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- (7) $P(A)P(\mathcal{C}(A)) \leq \frac{1}{4}$;

$$(8) \mathbf{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j);$$

(9) Ako imamo niz nepadajućih slučajnih događaja $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, onda vrijedi

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n);$$

(10) Ako imamo niz nerastućih slučajnih događaja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, onda vrijedi

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n);$$

(11) Ako je red $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j)$ konvergentan, tada se iz niza slučajnih događaja A_1, A_2, \dots realizira najviše konačno mnogo događaja.

Osobine 8.,9.,10. i 11. imaju adekvatna imena, radi se o *lemi o pokrivanju* i *neprekidnosti funkcije P* u odnosu na nepadajuće (nerastuće) nizove slučajnih događaja, odnosno o *Borel - Cantellijevoj lemi*.

DEFINICIJA 7. *Prostor vjerojatnosti je uređena trojka $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, gdje je Ω prostor elementarnih događaja, \mathfrak{F} σ - polje događaja generirano s Ω , dok je \mathbf{P} vjerojatnost definirana na \mathfrak{F} .*

Osnovni pojam, koji se definira u teoriji vjerojatnosti jeste prostor vjerojatnosti, za razliku od elementarnog događaja, koji smatramo intuitivno jasnim, razmatrajući ga na skupovnoj razini.

PRIMJEDBA 1. *Slučajan događaj A je skoro (gotovo) siguran ako vrijedi $\mathbf{P}(A) = 1$, odnosno gotovo (skoro) nemoguć ako je $\mathbf{P}(A) = 0$. Gotovo siguran (nemoguć) događaj označavamo s Ω (\emptyset), kao i siguran (nemoguć) događaj, no značenja su im različita.*

PRIMJEDBA 2. *U slučaju konačnog prostora vjerojatnosti, kada je $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ pripadne vjerojatnosti su $p_j := \mathbf{P}(\{\omega_j\})$, $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, polje događaja \mathfrak{F} je skup svih podskupova Ω , tj. partitivni skup od Ω , u oznaci $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{M : M \subseteq \Omega\}$. Inače, $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$, ako je $\#\Omega = n$ ¹. Napokon, vjerojatnost \mathbf{P} možemo definirati kao:*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j, \quad \forall A \in \mathfrak{F}.$$

¹Broj elemenata (kardinalan broj) skupa S označavamo s $\#S$.

Ako su elementarni događaji ω_j jednakovjerojatni, tj. $p_l = p_j$, $1 \leq l \leq j \leq n$, tada je ²

$$P(A) = \frac{\#\{\omega_j : \omega_j \in A\}}{n}, \quad \forall A \in \mathfrak{F}.$$

2.1. Geometrijska vjerojatnost. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, gdje je Ω izmjeriv u smislu da postoji njegova mjera, mjerni broj $0 < |\Omega| < \infty$. Ako proizvoljni slučajni događaj A , izmjeriv u gornjem smislu, generira podskup $S_A \subseteq \Omega$, tada je

$$P(A) = \frac{|S_A|}{|\Omega|}.$$

2.2. Zadaci.

ZADATAK 2.1. *Bacamo kocku. Kolika je vjerojatnost da ćemo dobiti broj manji od 3 ili veći od 5?*

Označimo s A događaj "Pao je broj manji od 3 ili veći od 5". Brojevi koji mogu pasti prilikom bacanja kocke su 1, 2, 3, 4, 5, 6, stoga je skup svih mogućih ishoda $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Brojevi koji nama odgovaraju su svi oni koji su manji od 3 ili veći od 5, a to su 1, 2, 6, pa je naš slučajni događaj $A = \{1, 2, 6\}$. Dakle, tražena vjerojatnost je

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = 0.5.$$

ZADATAK 2.2. *Telefonski broj nekog pretplatnika sastoji se od sedam znamenaka. Kolika je vjerojatnost da su sve znamenke tog broja različite?*

Označimo s A događaj "Sve znamenke telefonskog broja su različite".

Ukupan broj mogućih sedmeroznamenastih telefonskih brojeva je $\#\Omega = 9 \cdot 10^6$, a onih koji imaju sve znamenke različite je $\#A = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Stoga je tražena vjerojatnost

$$P(A) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 10^6}.$$

ZADATAK 2.3. *Biramo jedan dvoznamenkasti broj. Kolika je vjerojatnost da su mu znamenke jednake?*

²To je klasična ili Laplaceova definicija vjerojatnosti.

Označimo s A događaj "Znamenke broja su jednake".

Dvoznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10$, a onih kojima su znamenke jednake ima $9 \cdot 1$. Dakle, tražena vjerojatnost je

$$P(A) = \frac{9}{90} = 0.1.$$

ZADATAK 2.4. *Prilikom podjele špila od 52 karte na 4 igrača jedan od njih tri puta za redom ne dobiva niti jednog asa. Može li s pravom reći da nema sreće?*

Kada dijelimo 52 karte na 4 igrača, svaki od njih dobiva 13 karata. Maknemo li aseve, ostaje nam 48 karata. Stoga je vjerojatnost da igrač ne dobije niti jednog asa u tri dijeljenja

$$p = \frac{\binom{48}{13} \binom{48}{13} \binom{48}{13}}{\binom{52}{13} \binom{52}{13} \binom{52}{13}} = 0.028,$$

što je premala vjerojatnost da bi događaj bio "slučajan". Dakle, igrač nije imao sreće.

ZADATAK 2.5. *U trgovini je 100 žarulja, od kojih je 8 loših. Slučajno se bira 5 žarulja. Kolika je vjerojatnost da su među njima 3 loše?*

U trgovini imamo 8 od 100 loših i 92 od 100 dobrih žarulja. Ako želimo da među 5 izabranih žarulja budu 3 loše, tada iz skupa loših žarulja biramo 3, a iz skupa dobrih biramo dvije. Tada je tražena vjerojatnost

$$p = \frac{\binom{8}{3} \binom{92}{2}}{\binom{100}{5}} = 0.003.$$

ZADATAK 2.6. *Među slovima riječi "POTOP" slučajno se biraju 3 slova i stave u niz. Kolika je vjerojatnost da se dobije riječ "TOP"?*

Imamo 2 slova P, dva slova O i jedno slovo T. Stoga T u TOP-u možemo izabrati na 1 način, slovo O na dva načina i slovo P na dva načina, dok je ukupan broj troslovnih riječi $\binom{5}{3} \cdot 3!$ jer nam je bitan redosljed slova u riječi). Dakle,

$$p = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{\binom{5}{3} \cdot 3!} = \frac{1}{15}.$$

ZADATAK 2.7. *Osam ljudi slučajno sjeda na osam stolica. Kolika je vjerojatnost da dvije određene osobe sjede jedna do druge?*

Broj mogućih razmjesta 8 ljudi na 8 stolica je $8!$. Kako dvije osobe moraju sjediti jedna do druge, mogu ih promatrati kao jednu novu cjelinu, tj. više nemam 8 ljudi i 8 stolica, već $6+1$ cjelina = 7 ljudi i isto toliko mjesta, što nam daje $7!$ načina. Međutim te osobe mogu sjediti redom Pero-Ivo ili Ivo-Pero, tj. mogu ih međusobno permutirati, što znači da sveukupno imam dva puta po $7!$ načina za razmjestaj. Dakle,

$$p = \frac{2! \cdot 7!}{8!} = 0.25.$$

ZADATAK 2.8. *U razredu ima 30 učenika, od kojih 6 djevojaka. Razred se slučajno dijeli na 2 jednaka dijela. Kolika je vjerojatnost da u svakom dijelu ima po 3 djevojke?*

Formiramo prvu polovicu razreda na slučajan način, ostatak čini drugu polovicu. Ako u polovici razreda želimo 3 djevojke, tada od 6 djevojaka na raspolaganju biramo 3, a od 24 dečka biramo ostatak polovice, tj. 12 osoba. Stoga je tražena vjerojatnost

$$p = \frac{\binom{6}{3} \binom{24}{12}}{\binom{30}{15}} = 0.3487.$$

ZADATAK 2.9. *Od 50 ogrlica 5 je lažnih. Kolika je vjerojatnost da će slučajnim izborom 45 ogrlica biti izabrane i sve lažne?*

Biranje 45 ogrlica tako da među njima budu i sve lažne isto je kao da smo najprije uzeli sve lažne (što možemo učiniti na $\binom{5}{5}$ načina, tj. jedan način), a onda od ostatka uzmemo 40 ogrlica. To nam daje

$$p = \frac{\binom{5}{5} \binom{45}{40}}{\binom{50}{45}} = \frac{\binom{45}{40}}{\binom{50}{45}} = \frac{\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.577,$$

po pravilu za računanje binomnog koeficijenta.

ZADATAK 2.10. *Iz skupa od 52 karte uzimamo 2 gornje karte. Kolika je vjerojatnost p da su obje karte iste boje?*

U skupu od 52 karte imamo 4 boje po 13 karata. Kada biramo karte tako da budu iste boje, najprije biramo boju (na $\binom{4}{1} = 4$ načina), a zatim karte (na $\binom{13}{2}$ načina). Dakle,

$$p = \frac{\binom{4}{1} \binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = 0.235.$$

ZADATAK 2.11. *Dva strijelca gađaju, nezavisno jedan od drugoga, po jedanput u cilj. Vjerojatnost pogotka kod prvog je 0.7, a kod drugog 0.9. Naći vjerojatnost da će cilj biti pogoden barem jedanput.*

Pogoditi cilj barem jedanput znači da će cilj pogoditi prvi strijelac ili drugi strijelac ili oba. Označimo s $A_i = \{i\text{-ti strijelac je pogodio cilj}\}$, $i = 1, 2$; $A = \{\text{cilj je pogoden}\}$. Događaji A_1 i A_2 su nezavisni. Sada je:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \\ &= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = 0.97. \end{aligned}$$

ZADATAK 2.12. *Vjerojatnost da strijelac pogodi cilj pri jednom gađanju je 0.98. Odrediti vjerojatnost da od pet hitaca svaki put pogodi.*

Označimo s $S = \{\text{strijelac je pri gađanju pogodio cilj}\}$, a s $A = \{\text{od 5 gađanja, 5 puta je pogodio}\}$. Dakle,

$$P(A) = P(S) \cdot P(S) \cdot P(S) \cdot P(S) \cdot P(S) = (P(S))^5 = 0.98^5 = 0.904.$$

ZADATAK 2.13. *Dva strijelca gađaju cilj nezavisno jedan od drugoga. Prvi pogađa u 80% hitaca, a drugi u 70% hitaca. Naći vjerojatnost da će cilj biti pogoden ako strijelci pucaju po jedanput.*

Cilj će biti pogoden ako cilj pogodi prvi strijelac ili drugi strijelac ili oba. Označimo s $A_i = \{i\text{-ti strijelac je pogodio cilj}\}$, $i = 1, 2$, $A = \{\text{cilj je pogoden}\}$. Tada je

$$A = A_1 \cup A_2$$

i A_1, A_2 su nezavisni. Dakle:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0.94. \end{aligned}$$

ZADATAK 2.14. *U sobi postoje tri ispravna grla za električne žarulje. Iz kontingenta od 10 žarulja, od kojih je 6 neispravnih, uzimamo na sreću 3. Kolika je vjerojatnost da ćemo imati svjetlo ako nakon postavljanja žarulja okrenemo prekidač u sobi?*

U sobi ćemo imati svjetlo ako je barem jedna odabrana žarulja ispravna. Dakle $A = \{\text{najmanje jedna žarulja je ispravna}\}$. Sada je

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{6}.$$

ZADATAK 2.15. *Bacamo dvije točke na slučajan način na kvadrat $[0, 2]^2$. Naći vjerojatnost da je njihova međusobna udaljenost manja ili jednaka 1.*

Označimo prvu točku sa X , a drugu sa Y . Prostor elementarnih događaja u ovom slučaju je $\Omega = [0, 2]^2$. Područje u kojem nam je

udaljenost između točaka X i Y manja ili jednaka 1 je $S_{XY} = \{(X, Y) \in \Omega : |X - Y| \leq 1\}$. Stoga je:

$$p = \frac{\#S_{XY}}{\#\Omega} = \frac{4 - 1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

3. Uvjetna vjerojatnost

3.1. Teorem o totalnoj vjerojatnosti. Bayesova formula.

DEFINICIJA 8. *Neka je slučajan događaj $A \in \mathfrak{F}$, $P(A) > 0$ na zadanom prostoru vjerojatnosti $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Uvjetna vjerojatnost slučajnog događaja $B \in \mathfrak{F}$ pod uvjetom A je*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (14)$$

Sljedeći teorem pokazuje povezanost uvjetne vjerojatnosti s definicijom vjerojatnosti koju je uveo Kolmogorov.

TEOREM 1. *Funkcija $P(\cdot|A)$, $P(A) > 0$ definira vjerojatnost nad prostorom (Ω, \mathfrak{F}) , s osobinom $P(A|A) = 1$.*

Ovako definirana uvjetna vjerojatnost ima identične osobine kao i vjerojatnost po Kolmogorovu, tj. vrijede osobine 1–11. prethodnog poglavlja.

Iz definicije (10) možemo izvesti i pravilo množenja vjerojatnosti:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}); \quad (15)$$

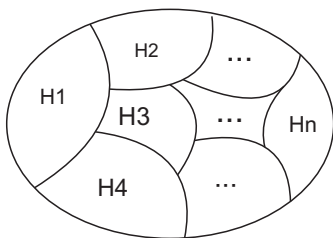
formula (15) se za $n = 2$ svodi na (14).

Skup nepraznih, disjunktnih slučajnih događaja $\{H_1, \dots, H_m\}$ nazivamo *dekompozicijom/razbijanjem prostora elementarnih događaja Ω* , ako je $\sum_{j=1}^m H_j = \Omega$. Događaje H_j , $j = \overline{1, m}$ nazivamo *hipotezama*. Posljedica definicije dekompozicije Ω na hipoteze je

$$\sum_{j=1}^m P(H_j) = 1.$$

TEOREM 2 (O TOTALNOJ VJEROJATNOSTI). *Ako je $\{H_1, \dots, H_m\}$ dekompozicija Ω , i slučajan događaj A je definiran nad istim prostorom vjerojatnosti $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, tada vrijedi*

$$P(A) = \sum_{j=1}^m P(H_j)P(A|H_j). \quad (16)$$



SLIKA 1. Dekompozicija/razbijanje prostora elementarnih događaja Ω

DOKAZ.

Neka je $A \subset \Omega$ bilo koji događaj. Dekompozicijom $\{H_1, \dots, H_m\}$ i njega smo razbili na disjunktne događaje

$$A = (A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n),$$

pa vrijedi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + \dots + P(A \cap H_n) \\ &= P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Budući da razne hipoteze H_j utječu uglavnom različito na realizaciju A , pretpostavimo da se slučajan događaj A realizirao s $P(A) > 0$. Kolike su tada vjerojatnosti hipoteza? Na ovo pitanje daje odgovor sljedeći teorem.

TEOREM 3 (BAYESOVA FORMULA VJEROJATNOSTI HIPOTEZA).
Pod uvjetima prethodnog teorema vrijedi

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^m P(H_j)P(A|H_j)}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (17)$$

DOKAZ.

Kako je

$$P(H_i \cap A) = P(H_i)P(A|H_i) = P(A)P(H_i|A), \quad i = \overline{1, m},$$

direktno imamo da je

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Primijenimo li formulu totalne vjerojatnosti na $P(A)$, dobijemo traženu formulu.

PRIMJEDBA 3. Koristeći dobivenu formulu (17), očito je najvjerojatnija hipoteza ona za koju je dostignut $\max_{1 \leq j \leq m} P(H_j|A)$. Jedna od mogućih primjena je i medicinska dijagnostika. Ako se simptom A pojavljuje kod bolesti H_j , i poznata je vjerojatnost pojavljivanja svih bolesti $P(H_j)$, kao i vjerojatnost pojavljivanja $P(A|H_j)$ simptoma A kod svih bolesti H_j , registrirani simptom A znači pojavljivanje bolesti H_j s vjerojatnosti $P(H_j|A)$.

3.2. Zadaci.

ZADATAK 3.1. Dane su četiri kutije s kuglicama. U prvoj su 3 bijele, 2 crne, 2 plave, 3 zelene, u drugoj 1 bijela, 3 crne, 5 plavih, 2 zelene, u trećoj 2 bijele, 4 crne, 1 plava, 2 zelene, u četvrtoj 4 bijele, 1 crna, 6 plavih i 3 zelene. Odabiremo kutiju na slučajan način, te iz nje biramo dvije kuglice. Naći vjerojatnost da je jedna zelena a druga bijela.

Vjerojatnost izvlačenja kuglica tako da jedna bude zelena a druga bijela ovisit će o tome iz koje smo kutije izvlačili (jer je sastav kutija različit). Dakle, pretpostavke koje utječu na vjerojatnost su

$$H_i = \{\text{odabrana je } i\text{-ta kutija}\}, \quad i = 1, 2,$$

a događaj čija nas vjerojatnost zanima je

$$A = \{\text{izvučena je jedna zelena i jedna bijela kuglica}\}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(H_1) &= P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}, \\ P(A|H_1) &= \frac{1}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{2}{55}, \quad P(A|H_3) = \frac{1}{9}, \quad P(A|H_4) = \frac{12}{91} \\ P(A) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{55} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{91} = 0.1165. \end{aligned}$$

ZADATAK 3.2. Prva serija od 200 artikala sadrži 5% škarta, dok druga serija od 150 artikala ima 6% škarta. Iz prve serije na sreću biramo 60, iz druge 40 artikala i uskladištimo ih zajedno. Iz skladišta se zatim na sreću bira artikal. Naći vjerojatnost da je artikal ispravan.

Vjerojatnost da će artikal biti ispravan ovisi o tome da li je on došao iz prve serije ili iz druge. Dakle, događaj čiju vjerojatnost tražimo je

$$A = \{\text{izvučeni artikal je ispravan}\},$$

a pretpostavke su

$$H_i = \{\text{artikal dolazi iz } i\text{-te serije}\}, \quad i = 1, 2.$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{60}{100}, & P(H_2) &= \frac{40}{100} \\ P(A|H_1) &= 0.95, & P(A|H_2) &= 0.94. \end{aligned}$$

Napokon je

$$P(A) = \frac{60}{100} \cdot 0.95 + \frac{40}{100} \cdot 0.94 = 0.946.$$

ZADATAK 3.3. *Iz skupa $S = \{1, 6, 7, 8, 9\}$ slučajno se bira jedan broj, a iz preostalog skupa još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da drugi izabrani broj bude neparan?*

Vjerojatnost biranja drugog broja tako da bude paran ovisiti će o tome koji je broj izabran prvi, da li paran ili neparan. Dakle,

$$A = \{\text{drugi izabrani broj je neparan}\},$$

$$H_1 = \{\text{prvi izabrani broj je neparan}\},$$

$$H_2 = \{\text{prvi izabrani broj je paran}\}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{2}{5}, & P(H_2) &= \frac{3}{5} \\ P(A|H_1) &= \frac{3}{4}, & P(A|H_2) &= \frac{2}{4}, \end{aligned}$$

odnosno

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5}.$$

ZADATAK 3.4. *Ptica slijeće u slučajno izabrano gnijezdo od ukupno tri gnijezda koja su joj na raspolaganju. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: dva dobra u prvom, jedno dobro i jedan mućak u drugom i dva mućka u trećem. Naći vjerojatnost da ptica sjedi na mućku. Ako je sjela na mućak, kolika je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?*

Da li će ptica sjediti na mućku ovisi o tome koje je gnijezdo izabrala. Označimo:

$$A = \{\text{ptica sjedi na mućku}\}$$

$$H_i = \{\text{ptica je izabrala } i\text{-to gnijezdo}\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3} \\ P(A|H_1) &= 0, & P(A|H_2) &= \frac{1}{2}, & P(A|H_3) &= 1 \end{aligned}$$

i

$$P(A) = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

Ako sada znamo da je sjela na mućak, zanima nas koja je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu, tj. zanima nas $P(H_2|A)$. Bit će

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

ZADATAK 3.5. *Jedna trgovina nabavlja DVD playere od 2 proizvođača, P_1 i P_2 . P_1 doprema 1000 komada, od čega 5% s greškom, a P_2 700 komada, od čega 2% s greškom. Kolika je vjerojatnost:*

- a) *da slučajno izabrani proizvod ima grešku?*
- b) *da je slučajno izabrani proizvod, koji ima grešku, od proizvođača P_1 ?*

a) Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{slučajno odabrani proizvod ima grešku}\}, \\ H_i &= \{\text{proizvod dolazi od proizvođača } P_i\}, \quad i = 1, 2. \\ P(H_1) &= \frac{1000}{1700} = \frac{10}{17}, \quad P(H_2) = \frac{700}{1700} = \frac{7}{17} \\ P(A|H_1) &= 0.05, \quad P(A|H_2) = 0.02. \end{aligned}$$

Stoga je

$$P(A) = \frac{10}{17} \cdot 0.05 + \frac{7}{17} \cdot 0.02 = 0.0376.$$

b) Zanima nas $P(H_1|A)$:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{17} \cdot 0.05}{0.0376} = 0.78125.$$

3.3. Nezavisnost slučajnih događaja. Ako realizacija slučajnog događaja A ne utječe na realizaciju slučajnog događaja B , i *vice versa*, tada među njima postoji određena nezavisnost.

DEFINICIJA 9. *Slučajni događaji A, B su (stohastički) nezavisni, ako $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Nadalje, slučajni događaji A_1, A_2, \dots su nezavisni, ako za svaki niz prirodnih brojeva j_1, \dots, j_m vrijedi*

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_m}). \quad (18)$$

Definiciju nezavisnosti možemo preoblikovati koristeći uvjetnu vjerojatnost:

$$P(B|A) = P(B).$$

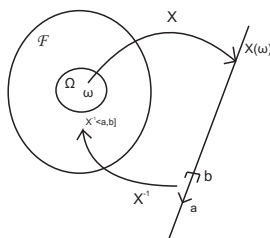
4. Slučajne varijable

Heuristički rečeno, elementarnim/slučajnim događajima možemo dodijeliti numeričke vrijednosti pomoću nekog preslikavanja. To preslikavanje očito ovisi o slučajnosti, a kodomena mu je realna, \mathbb{R} . Takva preslikavanja ili funkcije su *slučajne varijable*.

Strogo matematička definicija tog pojma upravo slijedi.

DEFINICIJA 10. *Promatramo prostor vjerojatnosti $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Funkcija $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je slučajna varijabla, ako je $X^{-1}(S) \in \mathfrak{F}$, $\forall S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

To zapravo znači da, ako je inverzna slika svakog Borelovskog skupa S (tim samim i svakog poluotvorenog intervala $[a, b)$, budući da je jednodimenzionalno Borelovo σ -polje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generirano upravo poluotvorenim intervalima skupa realnih brojeva) slučajan događaj, tj. $X^{-1}([a, b)) \in \mathfrak{F}$, onda je X slučajna varijabla.



SLIKA 2. Slučajna varijabla

Budući da smo iz Ω prešli u \mathbb{R} pomoću slučajne varijable, sljedeći rezultat pokazuje kako se "računa" sa slučajnim varijablama.

TEOREM 4. *Slučajna varijabla X definira vjerojatnost*

$$P_X(S) = P(X^{-1}(S)), \quad \forall S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (19)$$

Ta vjerojatnost P_X je *zakon razdiobe (distribucije) vjerojatnosti slučajne varijable X* , i jedna je od najvažnijih pojmova teorije vjerojatnosti.

Od svih slučajnih varijabli za naše potrebe dovoljno je ograničiti se na samo dva tipa: diskretne i neprekidne. Definirat ćemo prvo diskretne slučajne varijable. U tom cilju označimo s R_X skup vrijednosti slučajne varijable X , tj. $R_X := \{X(\omega) \in \mathbb{R} \mid \omega \in \Omega\}$. Ako je $\#R_X < \infty$, slučajna varijabla X je *prosta*. To znači da je $R_X =$

$\{x_1, \dots, x_n\}$. Vrlo bitan primjer proste slučajne varijable je *indikatorna varijabla* slučajnog događaja A :

$$\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}. \quad (20)$$

Stavljajući $A_j = \{\omega \mid X(\omega) = x_j\}$, $j = \overline{1, n}$, prosta slučajna varijabla X može se napisati u obliku sume:

$$X = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{I}_{A_j}.$$

Ako je skup vrijednosti R_X prebrojiv, tj. $\#R_X = \#\mathbb{N} = \aleph_0$ slučajnu varijablu X nazivamo *elementarnom*. Uzimajući iste oznake kao kod proste varijable, dobivamo zapis:

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathbb{I}_{A_j}, \quad R_X = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

4.1. Binomna razdioba. Promatramo realizaciju eksperimenta A , $P(A) = p > 0$. Označimo i $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Ponavljamo eksperiment A nezavisno n puta. Broj uspjeha S_n u seriji od n ponavljanja je očigledno prosta slučajna varijabla; ovaj model nosi ime *Bernoullijeva shema*. Vjerojatnost, da je eksperiment uspio j puta u n nezavisnih opetovanja, opisuje ponašanje navedenog modela:

$$P(S_n = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (21)$$

Imajući u vidu taj rezultat lako nalazimo da je

$$P(u \leq S_n < v) = \sum_{j=u}^{v-1} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}. \quad (22)$$

Vjerojatnosti (21) su tabelirane za različite vrijednosti parametara n i p . Također su tabelirane vjerojatnosti (22) za razne cjelobrojne $0 \leq u < v \leq n + 1$.

Zakon razdiobe slučajne varijable S_n je

$$P_{S_n}(A) = \sum_{j: j \in A \cap \{0, 1, \dots, n\}} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (23)$$

Vjerojatnosti $\binom{n}{j} p^j q^{n-j}$ definiraju *binomnu razdiobu*. Dakle, slučajna varijabla X ima binomnu razdiobu s parametrima n i p , ako za nju vrijedi (21); to pišemo $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

4.2. Poissonova aproksimacija binomne razdiobe. Kada broj ponavljanja eksperimenta u Bernoullijevoj shemi neograničeno raste, tada pod određenim uvjetima možemo pojednostaviti izračunavanje binomnih vjerojatnosti $P(S_n = j)$, $P(a \leq S_n < b)$.

Kažemo da slučajna varijabla X ima *Poissonovu razdiobu s parametrom* $\lambda > 0$ ako je

$$P(X = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}, \quad j \in \mathbb{N} \cup 0 \equiv \mathbb{N}_0. \quad (24)$$

To označavamo s $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Vezu binomne i Poissonove razdiobe daje sljedeći rezultat.

TEOREM 5. *Neka je $S_n \sim \mathcal{B}(n; p)$ i neka vjerojatnost p ovisi o broju ponavljanja u Bernoullijevoj shemi, tj. $p = p_n$. Ako vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, tada je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (25)$$

DOKAZ. Uvodimo oznaku $a_n \sim b_n$, $n \rightarrow \infty$ za $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$. Dakle, neka je n dovoljno veliko, tako da vrijedi

$$p \sim \frac{\lambda}{n}.$$

Aproksimiramo vjerojatnost

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &\sim \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k! n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Imajući sada u vidu da je

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \sim e^{-\lambda}, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \sim 1,$$

zaključujemo da je

$$P(S_n = k) \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

za svako čvrsto $k \in \mathbb{N}_0$, što je i trebalo dokazati. \square

Kao direktnu posljedicu teorema 5, navodimo da je

$$P(u \leq X < v) = \sum_{j=u}^{v-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}, \quad (26)$$

za razne cjelobrojne vrijednosti granica sumiranja u, v . Vjerojatnosti (24) i (26) također su tabelirane za neke vrijednosti $\lambda > 0$, $0 \leq u < v$.

Razdioba slučajne varijable $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, koja opisuje model broja uspješnih eksperimenata u beskonačnim serijama nezavisnih ponavljanja jednog eksperimenta je:

$$P_{S_\infty}(A) = e^{-\lambda} \sum_{j: j \in A \cap \mathbb{N}_0} \frac{\lambda^j}{j!}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (27)$$

4.3. Teorem Moivre - Laplace. Skup diskretnih (prostih, elementarnih) slučajnih varijabli je zatvoren u odnosu na aritmetičke operacije linearne kombinacije, množenja, itd. No, limes niza diskretnih slučajnih varijabli nije uvijek diskretna slučajna varijabla!

TEOREM 6. *Neka je $S_n \sim \mathcal{B}(n; p)$ s $p > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

$$P(S_n = j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{j - np}{\sqrt{npq}}, \quad (28)$$

*uniformno po x u svakom konačnom intervalu realnih brojeva*³. *Nadalje, vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (29)$$

Vidimo da niz prostih, slučajnih varijabli $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ s binomnom razdiobom teži nekoj slučajnoj varijabli X^* koja ima razdiobu:

$$P_{X^*}(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

koja niti je prosta niti elementarna, jer je njen skup vrijednosti \mathbb{R} . Ta slučajna varijabla je *neprekidnog tipa* i ima tzv. *normalnu*⁴ razdiobu, u oznaci $\mathcal{N}(0, 1)$.

4.4. Funkcija razdiobe. Svaka slučajna varijabla određena je svojim zakonom razdiobe $P_X(S)$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. To je skupovna funkcija, stoga definiramo i takozvane *funkcije razdiobe*.

³Ovdje i ubuduće oznaka \sim koristit će se za pokazivanje asimptotske ekvivalencije nizova, tj. $a_n \sim b_n$ znači da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

⁴u njemačkoj literaturi Gaußovu, u francuskoj Laplaceovu

DEFINICIJA 11. *Funkcija razdiobe vjerojatnosti $F_X(x)$ slučajne varijable X je vjerojatnost*

$$F_X(x) = \mathbf{P}_X(-\infty, x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Na osnovi ranije rečenog slijedi da je $F_X(x) = \mathbf{P}(X^{-1}(-\infty, x)) = \mathbf{P}(X < x)$. Očigledno i funkcija razdiobe vjerojatnosti F_X jednoznačno određuje zakon razdiobe \mathbf{P}_X . No pored toga funkcija razdiobe ima još čitav niz važnih osobina:

- (i) $F(x)$ je nepadajuća funkcija, tj. za svako $x_1 < x_2$ je $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- (ii) $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$;
- (iii) $F(x)$ je neprekidna slijeva;
- (iv) skup točaka prekida funkcije razdiobe $F(x)$ je najviše prebrojiv.

Naročito je važna osobina koja je pandan Newton - Leibnizove formule iz integralnog računa

$$\mathbf{P}(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a), \quad (31)$$

i koja vrijedi i za otvoreni - (a, b) , poluzatvoreni - $(a, b]$ i zatvoreni - $[a, b]$ interval u kojem se X nalazi, ako su a, b točke neprekidnosti F_X .

TEOREM 7. *$F(x)$ je funkcija razdiobe slučajne varijable X ako i samo ako nepadajuća, neprekidna slijeva i $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.*

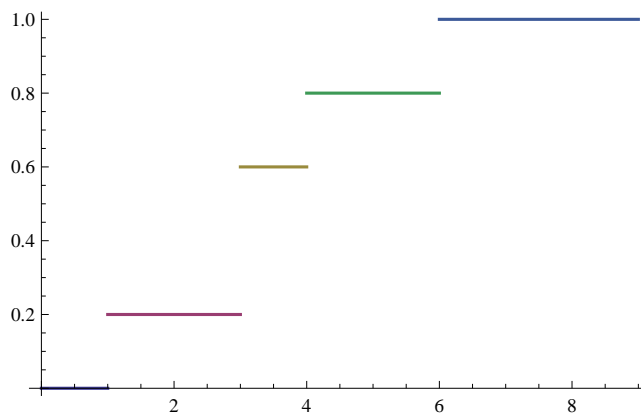
Funkcija razdiobe $F_X(x)$ diskretne slučajne varijable sa skupom vrijednosti $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ima "stepenasti" oblik:

$$F_X(x) = \sum_{j: x_j < x} \mathbf{P}(X = x_j), \quad (32)$$

gdje skok veličine $\mathbf{P}(X = x_j)$ nastupa u x_j .

4.5. Gustoća razdiobe vjerojatnosti. Ako se funkcija razdiobe vjerojatnosti $F(x)$ neprekidne slučajne varijable može napisati u obliku određenog integrala, tj. ako postoji funkcija $f(x)$ da vrijedi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

SLIKA 3. Graf funkcije razdiobe $F_X(x)$

tada je X *apsolutno neprekidnog tipa* i $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je *gustoća razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable*. Očito i gustoća razdiobe jednoznačno određuje razdiobu preko funkcije razdiobe, odnosno preko (29).

Iz definicije gustoće slijede sljedeće osobine:

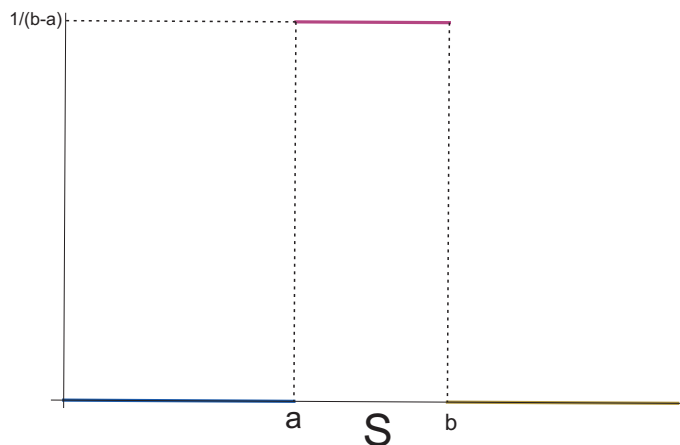
- (i) u svakoj točki neprekidnosti funkcije $f(x)$ je $F'(x) = f(x)$;
- (ii) $\mathbb{P}_X(S) = \int_S f(x) dx$, $\forall S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;
- (iii) $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

4.6. Neke neprekidne razdiobe. Neke neprekidne razdiobe/slučajne varijable zadajemo gustoćama. Najčešće spominjane među njima su uniformna, eksponencijalna, normalna, Cauchyjeva itd. razdioba.

4.6.1. UNIFORMNA $\mathcal{U}(S)$ RAZDIOBA. Slučajna varijabla apsolutno neprekidnog tipa X ima uniformnu $\mathcal{U}(S)$, $S \subset \mathbb{R}^d$ razdiobu na oblasti S , ako je njena gustoća oblika

$$f(x) = |S|^{-1} \mathbb{I}_S(x) , \quad (34)$$

gdje $|S|$ označava "mjeru" oblasti S . To pišemo $X \sim \mathcal{U}(S)$.



SLIKA 4. Graf funkcije gustoće uniformne razdiobe, $S = [a, b]$

Odgovarajuću funkciju razdiobe dobivamo iz (34). Konkretno, ako je $S = [a, b]$, onda je funkcija razdiobe varijable $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ oblika

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} . \quad (35)$$

4.6.2. EKSPONENCIJALNA $\mathcal{E}(\lambda)$ RAZDIOBA. Eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$ razdioba s parametrom $\lambda > 0$ definirana je gustoćom

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x) . \quad (36)$$

Ovdje je

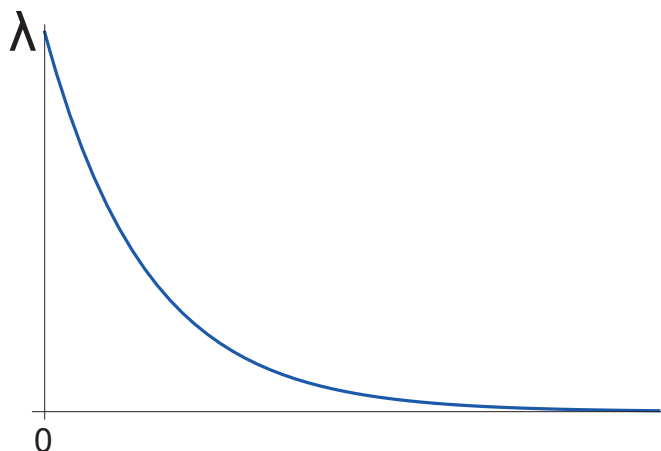
$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x) . \quad (37)$$

4.6.3. NORMALNA $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ RAZDIOBA. LAPLACEOVA FUNKCIJA. Normalna razdioba $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ s parametrima $m, \sigma > 0$ karakterizira se gustoćom

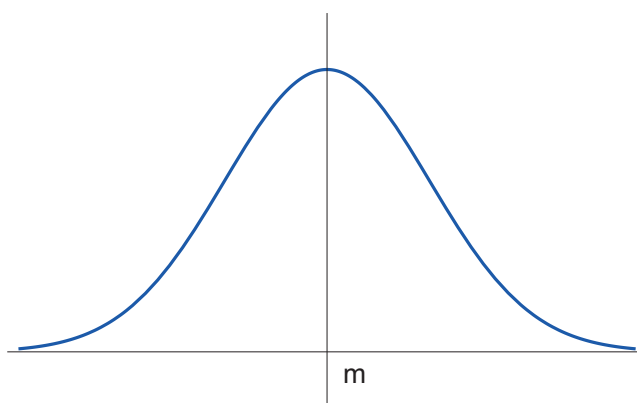
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} . \quad (38)$$

Razdioba $\mathcal{N}(0, 1)$ je takozvana jedinična normalna. Njena gustoća je

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} . \quad (39)$$



SLIKA 5. Graf funkcije gustoće eksponencijalne razdiobe

SLIKA 6. Graf funkcije gustoće normalne razdiobe $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Funkcija razdiobe u slučaju $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ je

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt, \quad (40)$$

odnosno kod jedinične normalne razdiobe je oblika

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x), \quad (41)$$

gdje je

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

tzv. *Laplaceova funkcija*. Među korisnijim osobinama $\Phi(x)$ su:

- a. $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \frac{1}{2}$,
- b. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,
- c. $\Phi(x \geq 4) \geq 0.499968$.

PRIMJEDBA 4. Normalna $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ razdioba je naročito popularna zbog svoje višestruke primjenjivosti. Tako imamo da je:

1. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ povlači da je $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Inače, X^* je standardizirana varijanta slučajne varijable X .
2. Vrijedi da je

$$P(a \leq X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \quad (42)$$

Napokon, gustoća $\mathcal{N}(0, 1)$ razdiobe $\phi(x)$ i Laplaceova funkcija su tabelirane za razne vrijednosti svog argumenta x . Budući da je $\phi(x)$ parna, a $\Phi(x)$ neparna funkcija, i za negativne x lako nalazimo odgovarajuće vrijednosti tih funkcija. Dakle, bitno je $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ slučajnu varijablu standardizirati i primijeniti osobinu (42) za izračunavanje konkretnih vjerojatnosti.

Jedna konkretna primjena je očigledan specijalan slučaj (42)

$$P_k := P(|X - m| \leq k\sigma) = 2\Phi(k), \quad (43)$$

koji se za $k = 1, 3$ popularno naziva σ -, 3σ - pravilo. Matematičko tumačenje ovih pravila je sljedeće. Neka X opisuje neku populaciju koja se ponaša po $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ razdiobi. Tada se približno $2\Phi(1) = 68.238\%$, odnosno $2\Phi(3) = 99.730\%$ svih $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ - populacija nalazi unutar intervala $[m - \sigma, m + \sigma]$, $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

4.7. Zadaci.

ZADATAK 4.1. *Pretpostavimo da telefoniramo u vrijeme kada je svaki četvrti telefonski broj zauzet. Kolika je vjerojatnost da će se od 12 poziva uspostaviti točno 3?*

Situaciju promatramo kao pokus. Pokus je uspio ako je poziv uspostavljen. 12 puta ponavljamo pokus, a vjerojatnost uspjeha (uspostave poziva) je $\frac{3}{4}$. Zanima me vjerojatnost da smo u 12 pokušaja imali 3 uspjeha. Dakle, $n = 12$, $p = \frac{3}{4}$, $k = 3$. Neka je

$$A_3 = \{\text{uspostavljene su točno tri veze}\}.$$

Tada je

$$P(A_3) = \binom{12}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^9 = 0.00035.$$

ZADATAK 4.2. Robot poslužuje 12 punktova istog tipa. Vjerojatnost da jednom punktu treba specijalna posluga u toku vremena t iznosi $\frac{1}{3}$. Kolika je vjerojatnost da u toku vremena t , specijalna posluga treba na 4 punkta?

Označimo sa

$$A = \{\text{specijalna posluga potrebna je na 4 punkta}\}.$$

Uspjehom pokusa smatramo situaciju u kojoj određenom punktu za- treba specijalna posluga. Vjerojatnost uspjeha je $p = \frac{1}{3}$. 12 punktova promatramo kao 12 ponavljanja pokusa. Dakle,

$$n = 12, p = \frac{1}{3}, k = 4$$

i

$$P(A) = \binom{12}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \approx 0.238.$$

ZADATAK 4.3. Koliko najmanje djece treba imati jedna obitelj da bi s vjerojatnošću od najmanje 0.75 imala najmanje 1 muško dijete? (Vjerojatnost rađanja dječaka iznosi 0.515)

Pokus, tj. rađanje djece, ponavljamo n puta, uspjehom smatramo rođenje dječaka, koji se rađa s vjerojatnosti $p = 0.515$. Označimo sa

$$A = \{\text{obitelj ima darem jedno muško dijete}\},$$

i želimo da je

$$P(A) \geq 0.75.$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\{\text{obitelj nema niti jedno muško dijete}\}) \\ &= 1 - \binom{n}{0} 0.515^0 \cdot 0.485^n \geq 0.75 \end{aligned}$$

Dakle, rješavamo jednadžbu po n :

$$1 - 0.485^n \geq 0.75$$

$$0.485^n \leq 0.25$$

$$n \log 0.485 \leq \log 0.25$$

$$n \geq 1.92 \approx 2$$

Dakle, obitelj treba imati najmanje 2 djece da bi imali barem jednog dječaka s vjerojatnosti većom od 0.75.

ZADATAK 4.4. *Je li, u igri podjednakih protivnika, vjerojatnije dobiti 3 od 4 ili 6 od 8 partija (Zadaća viteza De Merea)?*

S obzirom da su protivnici podjednaki, vjerojatnost pobjede = vjerojatnost poraza = 0.5. U igri 3 od 4 je $n = 4$, $k = 3$ i vjerojatnost je

$$P(\{3 \text{ od } 4\}) = \binom{4}{3} 0.5^3 \cdot 0.5^1 = 0.25$$

U igri 6 od 8 je $n = 8$, $k = 6$ i vjerojatnost je:

$$P(\{6 \text{ od } 8\}) = \binom{8}{6} 0.5^6 \cdot 0.5^2 = 0.109$$

Dakle, vjerojatnije je dobiti 3 od 4 nego 6 od 8.

ZADATAK 4.5. *U smjeru kretanja automobila nalaze se redom tri semafora koji rade nezavisno jedan od drugog. Na svakom se s $p = 0.5$ pojavljuje crveno i sa $q = 0.5$ zeleno svjetlo. Slučajna varijabla X predstavlja broj semafora pored kojih prolazi auto do prvog zaustavljanja. Naći razdiobu od X .*

Da bi odredili razdiobu od X moramo odrediti \mathcal{R}_X i pripadne vjerojatnosti. Kako je X broj semafora pored kojih automobil prolazi do prvog zaustavljanja, $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$ (može nas zaustaviti odmah prvi semafor, možemo proći kroz prvi i zaustavi nas drugi, itd). Pripadne vjerojatnosti su:

$$P(\{X = 0\}) = 0.5, \quad P(\{X = 1\}) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25,$$

$$P(\{X = 2\}) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.125$$

$$P(\{X = 3\}) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.125,$$

i zakon razdiobe je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.125 \end{pmatrix}.$$

ZADATAK 4.6. *Slučajna varijabla X diskretnog tipa zadana je svojom razdiobom*

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.1 & \alpha & 0.4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Odredite:

- a) *Numeričku vrijednost α .*

b) Naći funkciju razdiobe od X i $P(\frac{1}{2} < X \leq 2)$.

a) Kako znamo da je suma vjerojatnosti $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, α nalazimo iz jednadžbe

$$0.1 + 0.1 + \alpha + 0.4 + \alpha = 1$$

što nam daje $\alpha = 0.2$. Dakle,

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

b) Funkcija razdiobe je:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0.1, & -1 < x \leq 0 \\ 0.2, & 0 < x \leq 1 \\ 0.4, & 1 < x \leq 2 \\ 0.8, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

a tražena vjerojatnost je

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right) = F_X(2) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4 - 0.2 = 0.2.$$

ZADATAK 4.7. U kutiji su 3 bijele i 3 crne kuglice. Izvlači se po 1 kuglica, bez vraćanja, sve dok se ne izvuče bijela kuglica. Ako je slučajna varijabla X broj izvlačenja, nađi:

- a) \mathcal{R}_X
- b) razdiobu od X
- c) $F_X(x)$

- a) $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4\}$
- b)

$$P(\{X = 1\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\{X = 2\}) = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{3}{10},$$

$$P(\{X = 3\}) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}, \quad P(\{X = 4\}) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{20},$$

pa je razdioba

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

c) Funkcija razdiobe je:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{8}{10}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{19}{20}, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases} .$$

ZADATAK 4.8. Dva strijelca S_1 i S_2 gađaju po jednom u istu metu. Vjerojatnost pogotka za S_1 iznosi 0.7, a za S_2 0.69. Ako je X broj pogodaka u metu, nađi:

- a) \mathcal{R}_X
 b) razdiobu od X i $F_X(x)$
 c) $P(\{X \leq 1\})$

- a) $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2\}$
 b)

$$P(\{X = 0\}) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12, \quad P(\{X = 1\}) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.46,$$

$$P(\{X = 2\}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42.$$

pa je razdioba

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.12 & 0.46 & 0.42 \end{pmatrix} .$$

Funkcija razdiobe je:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.12, & 0 < x \leq 1 \\ 0.58, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} .$$

c)

$$P(X \leq 1) = P(-\infty < X \leq 1) = F_X(1) - F_X(-\infty) = 0.12 - 0 = 0.12.$$

ZADATAK 4.9. Kocka se baca dok se prvi put ne pojavi 1. Ako je slučajna varijabla X - broj bacanja kocke, treba naći:

- a) \mathcal{R}_X
 b) razdiobu od X
 c) $P(X > 3)$

- a) Na kocki možemo dobiti 1 iz prvog puta, drugog puta, trećeg puta, ... što nam daje $\mathcal{R}_X = \mathbb{N}$.
- b) Vjerojatnost da na kocki padne 1 je $\frac{1}{6}$, a vjerojatnost da ne padne 1 je $\frac{5}{6}$. Ako iz prvog puta padne 1, tada je

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$

Vjerojatnost da iz drugog, trećeg... puta padne 1 je

$$P(X = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2, \dots$$

što nam očito govori da X ima geometrijsku $\mathcal{G}(\frac{1}{6})$ razdiobu.

c)

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.579.$$

ZADATAK 4.10. *Izvodi se 20 nezavisnih Bernoullijevih pokusa, i u svakom od njih vjerojatnost nastupa događaja A iznosi 0.73. Ako je slučajna varijabla X - broj nastupa događaja A u 20 pokusa, nađi razdiobu od X .*

X očito ima binomnu $\mathcal{B}(20, 0.73)$ razdiobu. Stoga je

$$P(X = k) = \binom{20}{k} 0.73^k \cdot 0.27^{20-k}.$$

ZADATAK 4.11. *Statistički je utvrđeno da je lijevorukih ljudi 1%. Kolika je vjerojatnost da među 200 slučajno izabranih osoba bude:*

- a) *točno 4 ljevaka*
 b) *ne manje od 4 ljevaka*

Ovdje je $n = 200$, $p = 0.01$, tj. n je veliko, a p malo. Zbog toga će nam X imati Poissonovu $\mathcal{P}(2)$ razdiobu, $\lambda = 200 \cdot 0.01 = 2$.

- a) $P(X = 4) = e^{-2} \frac{2^4}{4!} = 0.090223$
 b) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - e^{-2} \left(2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) = 0.143$

ZADATAK 4.12. *Iz skladišta je otpremljeno 500 boca vina od 1l. Vjerojatnost da se prilikom transporta razbije 1 boca iznosi 0.004. Nađi vjerojatnot da se na odredište dopremi:*

- a) *500 nerazbijenih boca*
 b) *od 5 do 8 razbijenih boca*

Neka je slučajna varijabla X - broj razbijenih boca. Tada je očito $X \sim \mathcal{B}(500, 0.004) \sim \mathcal{P}(2)$.

$$\text{a) } P(X = 0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} = \frac{1}{e^2} = 0.135.$$

$$\text{b) } P(5 \leq X \leq 8) = e^{-2} \left(\frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} \right) = 0.052$$

ZADATAK 4.13. *Kolika je vjerojatnost da se u deset bacanja kockice šestica pojavi:*

a) *pet puta*

b) *manje od 5, a više od 2 puta*

Neka je X - broj šestica u 10 bacanja kockice. Tada je $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$.

$$\text{a) } P(X = 5) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.0130$$

$$\text{b) } P(2 < X < 5) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.155 + 0.0543 = 0.2093$$

ZADATAK 4.14. *Slučajna varijabla X zadana je svojom gustoćom*

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odredite numeričku vrijednost k i funkciju razdiobe X .

Iskoristimo svojstvo normiranosti za određivanje nepoznatog parametra k :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+x^2} dx = 2k \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2k \arctan x \Big|_0^{\infty} = k\pi = 1.$$

Dakle,

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, funkcija razdiobe je:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

za svako realno x .

ZADATAK 4.15. *Zadana je funkcija razdiobe slučajne varijable X*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x^3 + 1, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- a) Nađi funkciju gustoće
 b) Ako je $P(x \geq a) = \frac{1}{8}$, koliki je a ?

a) Kako je $F(x)$ derivabilna, gustoću nalazimo iz

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 < x \leq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

b) Imamo:

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \frac{1}{8} \\ 1 - P(X < a) &= \frac{1}{8} \\ P(X < a) &= \frac{7}{8} \\ P(-\infty < X < a) &= \frac{7}{8} \\ F(a) - F(-\infty) &= \frac{7}{8} \\ F(a) &= \frac{7}{8} \\ a^3 + 1 &= \frac{7}{8} \\ a &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zaista, budući da jednačba $a^3 + 1/8 = (a + 1/2)(a^2 - a/2 + 1/4) = 0$ ima jedno realno rješenje $a = -1/2$, a preostala dva su kompleksa, jer je diskriminanta D kvadratnog tročlana $a^2 - a/2 + 1/4$ jednaka $D = -3/4 < 0$, slijedi tvrdnja.

ZADATAK 4.16. Zadana je funkcija razdiobe slučajne varijable X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x), & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- a) Nađi funkciju gustoće
 b) Ako je $P(0 < x < a) = 0.25$, koliki je a ?

a) Kako je $F(x)$ derivabilna, gustoću nalazimo iz

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

b) Imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0 < x < a) &= 0.25 \\ F(a) - F(0) &= 0.25 \\ \frac{1 + \sin a}{2} - \frac{1 + \sin 0}{2} &= 0.25 \\ \frac{\sin a}{2} &= 0.25 \\ \sin a &= 0.5 \\ a &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

ZADATAK 4.17. Naći brojčanu vrijednost parametra k i vjerojatnost $\mathbf{P}(|X| \leq a^{-1})$ ako je za neko $a > 0$

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Iz svojstva normiranosti funkcije gustoće dobivamo:

$$\int_0^{\infty} k e^{-ax} dx = \frac{-k}{a} e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = \frac{k}{a} = 1,$$

dakle, $k = a$, tj. $X \sim \mathcal{E}(a)$, odnosno

$$f(x) = \begin{cases} a e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Sada možemo izračunati traženu vjerojatnost:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X| \leq a^{-1}) &= \mathbf{P}(-a^{-1} \leq X \leq a^{-1}) = \mathbf{P}(0 \leq X \leq a^{-1}) \\ &= \int_0^{a^{-1}} a e^{-ax} dx = -e^{-ax} \Big|_0^{a^{-1}} = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

ZADATAK 4.18. Radijus kruga mjeri se približno i ima razdiobu $\mathcal{U}(5, 7)$. Naći vjerojatnost da je r između 5.5 i 6.

Kako je $r \sim \mathcal{U}(5, 7)$, znamo da je funkcija razdiobe od r

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5 \\ \frac{1}{2}x, & 5 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}.$$

Sada je tražena vjerojatnost

$$\mathbb{P}(5.5 < x < 6) = F(6) - F(5.5) = \frac{6}{2} - \frac{5.5}{2} = 0.25.$$

ZADATAK 4.19. *Slučajna varijabla X ima $\mathcal{U}(0, 1)$ razdiobu. Naći vjerojatnost $\mathbb{P}(|Y| \leq 0.5)$ ako je $Y = -X + 2$.*

Označimo sa F_X funkciju razdiobe od X , sa F_Y funkciju razdiobe od Y . Sada je

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(-X + 2 < x) = \mathbb{P}(X > 2 - x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F_X(2 - x). \end{aligned}$$

Dakle,

$$F_Y(x) = 1 - \begin{cases} 0, & 2 - x \leq 0 \\ 2 - x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 2 - x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Sada je

$$\mathbb{P}(|Y| \leq 0.5) = \mathbb{P}(-0.5 \leq x \leq 0.5) = F_Y(0.5) - F_Y(-0.5) = 0.$$

ZADATAK 4.20. *Slučajna varijabla X ima $\mathcal{N}(m, 16)$ razdiobu. Naći m tako da vrijedi*

$$\mathbb{P}(2 + m < X < 3m + 6) = 0.2835.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 + m < X < 3m + 6) &= \mathbb{P}\left(\frac{2 + m - m}{4} < X^* < \frac{3m + 6 - m}{4}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X^* < \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}m + \frac{3}{2}\right) - \Phi(0.5) = 0.2835. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{1}{2}m + \frac{3}{2}\right) &= 0.2835 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.2835 + 0.1915 = 0.475 \\ \frac{1}{2}m + \frac{3}{2} &= \Phi^{-1}(0.475) = 1.94 \quad \Rightarrow \quad m = 0.88. \end{aligned}$$

ZADATAK 4.21. Neka je $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Ako je $P(X < 0) = P(X > 0.8) = 0.25$, odredite numeričke vrijednosti parametara razdiobe m, σ .

Imamo

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= P(-\infty < X < 0) = P\left(-\infty < X^* < -\frac{m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{m}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right) = \frac{1}{4} \\ \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right) &= \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} P(X > 0.8) &= P(0.8 < X < \infty) = P\left(\frac{0.8 - m}{\sigma} < X^* < \infty\right) \\ &= \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{0.8 - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{0.8 - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{4} \\ \Phi\left(\frac{0.8 - m}{\sigma}\right) &= \frac{1}{4} \\ \frac{0.8 - m}{\sigma} &= \Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Izjednačimo

$$\begin{aligned} \frac{0,8 - m}{\sigma} &= \frac{m}{\sigma} \\ 2m &= 0.8 \\ m &= 0.4 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 0.8 - 0.4 &= \sigma \Phi^{-1}(0.25) \\ \sigma &= \frac{0.4}{0.68} = 0.59. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $X \sim \mathcal{N}(0.2, 0.59^2)$.

ZADATAK 4.22. Visina čovjeka ima razdiobu $X \sim \mathcal{N}(174, 9^2)$.

- Koliki je postotak ljudi viših od 2 metra?
- Ispod koje se visine nalazi 5% ljudi?
- Koliki je postotak ljudi s visinom od 160 do 190 cm?

a) Zanima nas

$$\begin{aligned} P(X > 200) &= P(200 < X < \infty) = P\left(\frac{200 - 174}{9} < X^* < \infty\right) \\ &= \Phi(\infty) - \Phi(2.89) = 0.5 - 0.498 = 0.002 = 0.2\% \end{aligned}$$

b) Računamo:

$$\begin{aligned} P(X < a) &= 0.05 \\ P\left(-\infty < X < \frac{a - 174}{9}\right) &= 0.05 \\ \Phi\left(\frac{a - 174}{9}\right) - \Phi(-\infty) &= 0.05 \\ \Phi\left(\frac{a - 174}{9}\right) &= 0.05 - 0.5 \\ \frac{a - 174}{9} &= \Phi^{-1}(0.45) \\ 179 - a &= 9 \cdot 1.64 \\ a &= 159.15. \end{aligned}$$

c) Imamo:

$$\begin{aligned} P(160 \leq X \leq 190) &= P\left(\frac{160 - 174}{9} \leq X \leq \frac{190 - 174}{9}\right) \\ &= \Phi(1.78) - \Phi(-1.56) = \Phi(1.78) + \Phi(1.56) \\ &= 0.4625 + 0.4406 = 90.3\% \end{aligned}$$

ZADATAK 4.23. Ako je $X \sim \mathcal{N}(12, 2^2)$ nađi:

- a) $P\left(\frac{1}{X} \leq \frac{2}{9}\right)$
 b) $P(X^2 > 6X)$

a) Računamo:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{X} \leq \frac{2}{9}\right) &= P\left(X \geq \frac{2}{9}\right) \\ &= P\left(\frac{4.5 - 12}{2} \leq X^* < \infty\right) \\ &= \Phi(\infty) - \Phi(-3.75) \\ &= 0.5 + 0.499 = 0.999. \end{aligned}$$

b) Sada je:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X^2 > 6X) &= \mathbf{P}(X^2 - 6X > 0) = \mathbf{P}(X(X - 6) > 0) \\
 &= \mathbf{P}(X < 0) + \mathbf{P}(X > 6) \\
 &= \mathbf{P}\left(-\infty < X^* < -\frac{12}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{6-12}{2} < X^* < \infty\right) \\
 &= \Phi(-6) - \Phi(-\infty) + \Phi(\infty) - \Phi(-3) \\
 &= 0.5 + 0.49865 = 0.99865.
 \end{aligned}$$

5. Numeričke karakteristike slučajnih varijabli

5.1. Matematičko očekivanje.

DEFINICIJA 12. Matematičko očekivanje $\mathbf{E}X$ realne slučajne varijable X koja je definirana na prostoru vjerojatnosti $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ je vrijednost integrala

$$\mathbf{E}X = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega) \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

tj. to je broj (44).

Ova definicija potrebuje poznavanje tehnike apstraktnog, Lebesgueovog integrala. No slučajna varijabla posjeduje i tzv. *fazni prostor* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P}_X)$ u kojem radimo s funkcijom razdiobe F_X , koju zadajemo preko $\mathbf{P}_X([a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$, vidi 4.4. Iz definicije očekivanja odmah slijedi da $\mathbf{E}X$ postoji, ako i samo ako je

$$\int_{\mathbb{R}} x dF_X(x) \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

Na taj način imamo sljedeći rezultat. Matematičko očekivanje slučajne varijable X je broj

$$\mathbf{E}X = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx & X \text{ je neprekidnog tipa} \\ \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathbf{P}(X = x_j) & X \text{ je diskretnog tipa,} \end{cases} \quad (46)$$

ako gustoća $f = F'$ varijable X postoji.

Neke od osnovnih osobina matematičkog očekivanja jesu sljedeće:

- (1) $\mathbf{E}X$ postoji, ako i samo ako postoji $\mathbf{E}|X|$.
- (2) Ako $\mathbf{P}(X = \gamma) = 1$, tada je $\mathbf{E}X = \gamma$.

(3) $P(X \geq Y) = 1$, onda je $EX \geq EY$.

(4) (LINEARNOST OČEKIVANJA.) Ako postoje EX_1, \dots, EX_n , onda za sve $\alpha_j \in \mathbb{R}$ je

$$E \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j EX_j. \quad (47)$$

(5) (MONOTONA KONVERGENCIJA.) Ako niz nenegativnih slučajnih varijabli $0 \leq X_n$ monotono teži graničnoj slučajnoj varijabli ξ , tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = E\xi$.

(6) (TEOREM LEBESGUEA - DOMINANTNA KONVERGENCIJA.) Ako $P(|X_n| \leq Y) = 1$ i $EY \in \mathbb{R}$, tada ako $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \xi$, onda vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = E\xi$.

(7) Neka je $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je

$$Eg(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) dx, \quad (48)$$

gdje je $f = F'_X$ gustoća varijable X .

(8) Ako su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne varijable s očekivanjima, tada vrijedi

$$E(X_1 \cdots X_n) = EX_1 \cdots EX_n. \quad (49)$$

5.2. Disperzija/varijanca. *Moment reda α slučajne varijable X je broj EX^α , dok je $E|X|^\alpha$ apsolutni moment reda α . Napokon, promatramo još i centralni moment reda α i apsolutni centralni moment reda α su $E(X - EX)^\alpha$, odnosno $E|X - EX|^\alpha$ respektivno ⁵.*

O navednim momentima možemo izreći sljedeće rezultate:

- (i) EX^α postoji, ako i samo ako postoji $E|X|^\alpha$.
- (ii) EX_0^α postoji, ako i samo ako postoji $E|X_0|^\alpha$.

DEFINICIJA 13. *Centralni moment drugog reda slučajne varijable X je njena disperzija/varijanca u oznaci DX . Standardna devijacija $\sigma(X)$ slučajne varijable X je $\sigma(X) = \sqrt{DX}$.*

⁵Postupak oduzimanja očekivanja od promatrane varijable, $X_0 = X - EX$, što rezultira s $EX_0 = 0$, je *centriranje*. Inače, posebno važnu familiju slučajnih varijabli čine slučajne varijable s konačnim momentom drugog reda koje su definirane nad istim prostorom vjerojatnosti. Tu familiju označavamo s $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Iz definicije slijedi da je

$$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2. \quad (50)$$

Osnovne osobine disperzije su:

- (i) $DX \geq 0$; $DX = 0$ ako i samo ako je $P(X = \text{const}) = 1$.
- (ii) $D(\alpha X + \beta) = \alpha^2 DX$.
- (iii) Funkcija $E(X - \alpha)^2$ ima minimum jednak DX za $\alpha = EX$.
- (iv) (JEDNAKOST BIENAYMÉA.) Neka su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne varijable s konačnom disperzijom. Tada

$$D\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 DX_j. \quad (51)$$

PRIMJEDBA 5. Standardizirana varijanta slučajne varijable X je slučajna varijabla

$$X^* = \frac{X - EX}{\sigma(X)}; \quad (52)$$

odmah vidimo da je $EX^* = 0$, $DX^* = 1$. U slučaju normalne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ distribuirane slučajne varijable X bit će

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Sada je jasnija Primjedba 4. koja se odnosi na centriranu i normiranu normalno distribuiranu slučajnu varijablu; vidi specijalno relaciju (42).

5.3. Očekivanje i disperzija nekih razdioba.

	Razdioba	Gustoća/zakon razdiobe	EX	DX
1.	Binomna $\mathcal{B}(n, p)$	$P(X = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$ $j = \overline{0, n}$	np	npq
2.	Poissonova $\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$	$P(X = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}, j \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
3.	Geometrijska $\mathcal{G}(p), p \in (0, 1)$	$P(X = j) = pq^j, j \in \mathbb{N}_0$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
4.	Pascalova $P(n; p), p > 0$	$P(X = j) = \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n}$ $j \geq n$	$\frac{n}{p}$	$\frac{nq}{p^2}$
5.	Uniformna diskretna	$P(X = j) = \frac{1}{j}, j = \overline{1, n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

	Razdioba	Gustoća/zakon razdiobe	EX	DX
6.	Uniformna $\mathcal{U}[a, b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
7.	Eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
8.	Normalna $\mathcal{N}(m, \sigma^2), \sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$	m	σ^2
9.	Normalna jedinična $\mathcal{N}(0, 1)$	$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$	0	1
10.	Gama $\Gamma(\alpha, \beta^{-1})$ $\alpha, \beta > 0$	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
11.	Beta $\mathcal{B}(a, b), a, b > 0$	$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\mathcal{B}(a, b)} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
12.	Cauchyjeva $\mathcal{C}(\lambda), \lambda > 0$	$f(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$	-	-
13.	Logistička $L(a; b)$	$f(x) = \frac{be^{-(a+bx)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)}{(1 + e^{-(a+bx)})^2}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{\pi^2}{3b^2}$
14.	Laplaceova	$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{ x-\mu }{\lambda}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$	μ	$2\lambda^2$
15.	Raleigheva $\mathcal{R}(\alpha), \alpha > 0$	$f(x) = \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$	$\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$	$\alpha(2 - \frac{\pi}{2})$
16.	Weibullova $W_c(a), a > 0$	$f(x) = cax^{a-1} e^{-cx^a} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$	$\Gamma(\frac{a+1}{a})c^{-\frac{1}{a}}$	$c^{-\frac{2}{a}} \left[\frac{2}{a} \Gamma(\frac{2}{a}) - \frac{1}{a^2} \Gamma(\frac{1}{a}) \right]^2$

Napomena.

1. Gama funkcija, ili Eulerova funkcija druge vrste je nepravilni integral $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-sx} dx$; u slučaju $s \in \mathbb{N}$ bit će $\Gamma(s) = (s-1)!$
2. Beta funkcija, ili Eulereova funkcija prve vrste je parametarski integral $B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx$; osobina $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ povezuje Eulerove funkcije prve i druge vrste.

5.4. Zadaci.

ZADATAK 5.1. *Slučajna varijabla X ima razdiobu*

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Odredite funkciju razdiobe od X i EX .

Lako pronalazimo iz svojstva normiranosti da je $\lambda = 0.5$, pa je funkcija razdiobe

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0.2, & -1 < x \leq 0 \\ 0.5, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Još nam treba

$$EX = -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 = 0.3.$$

ZADATAK 5.2. *Neka je $X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{5})$. Naći očekivanje slučajne varijable $Y = X + 3$.*

Jednostavno računamo:

$$EY = E(X + 3) = EX + 3 = 3 \cdot \frac{1}{5} + 3 = \frac{18}{5}.$$

ZADATAK 5.3. *Nezavisne slučajne varijable X, Y zadane su razdiobama*

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Naći EZ ako je $Z = XY$.

Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli imamo:

$$EZ = E(XY) = EXEY = \left(0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{3}$$

ZADATAK 5.4. *Vjerojatnost da stroj izbaci loš proizvod je 5%. Kontrolor uzima 80 proizvoda. Ako je X - broj dobrih proizvoda među 80, nađi očekivani broj dobrih proizvoda.*

Očito je ovdje $X \sim \mathcal{B}(80, 0.95)$. Stoga je očekivani broj dobrih proizvoda

$$EX = np = 80 \cdot 0.95 = 76.$$

ZADATAK 5.5. *Neka X ima $\mathcal{E}(2)$ razdiobu.*

- Nađi funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = -0.5X + 1$*
- Nađi EY*
- Odredi vjerojatnost $P(|Y + 1| > 1)$*

- Kako X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom 2, računamo*

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y < x) = P(-0.5X + 1 < x) \\ &= P(X < 2(1 - x)) = F_X(2(1 - x)) \\ &= \begin{cases} e^{4(1-x)}, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Sada je*

$$EY = E(-0.5X + 1) = -0.5EX + 1 = -0.5 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0.75.$$

- Tražena vjerojatnost je*

$$P(|Y+1| > 1) = 1 - P(-2 \leq Y \leq 0) = 1 - F_Y(0) + F_Y(-2) = 1 - e^4 + e^{12}.$$

ZADATAK 5.6. *Slučajna varijabla X zadana je razdiobom*

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Nađi EY i DY ako je $Y = X^2 - 1$.

Računamo:

$$\begin{aligned} EY &= E(X^2 - 1) = EX^2 - 1 \\ &= (-2)^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.1 - 1 \\ &= 1.4 - 1 = 0.4, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} DY &= D(X^2 - 1) = DX^2 = E(X^2 - EX^2)^2 \\ &= EX^4 - (EX^2)^2 \\ &= 1.6 + 0.3 + 0.3 + 0.6 - 1.16 = 1.84. \end{aligned}$$

ZADATAK 5.7. *Slučajna varijabla X je vrijeme čekanja putnika do dolaska autobusa. Ako X ima uniformnu $\mathcal{U}(a, b)$ razdiobu, a $EX = \frac{1}{2}(a + b) = 7,5$ min, $DX = \frac{1}{12}(b - a)^2 = 18.75$ min², koje vrijeme protječe između dva dolaska autobusa?*

Vrijeme između dolaska dva autobusa zaopravo je jednako duljini segmenta $[a, b]$. Dakle, trebamo odrediti a i b . Rješavamo sistem od jedne linearne i jedne kvadratne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a + b) &= 7.5 \\ \frac{1}{12}(b - a)^2 &= 18.75. \end{aligned}$$

Njegova su rješenja $(a, b) \in \{(15, 0), (0, 15)\}$. Kako samo drugo rješenje ima geometrijsko smislenu interpretaciju, jer interval (a, b) definiramo za $a < b$, usvajamo $a = 0, b = 15$. Dakle,

$$X \sim \mathcal{U}(0, 15)$$

tj. 15 minuta prođe između dva autobusa.

ZADATAK 5.8. *Za slučajnu varijablu X funkcija gustoće glasi:*

$$f_X(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{32}}.$$

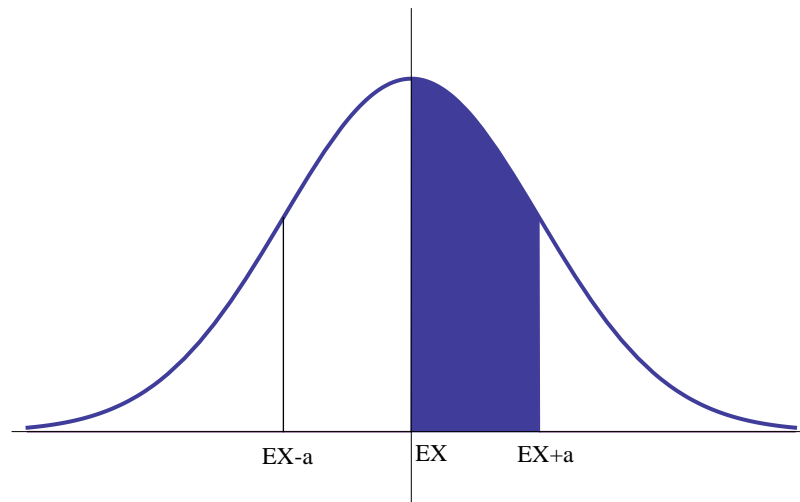
Nadi:

- a) EX, DX
- b) *simetrični interval oko EX u kojem leži 95.45% vrijednosti slučajne varijable X .*

- a) Iz izraza za gustoću slučajne varijable očito je da X ima $\mathcal{N}(-3, 4^2)$ razdiobu. Stoga je

$$EX = -3, DX = 16.$$

- b) Zanima nas simetrični interval oko očekivanja.



Računamo:

$$\begin{aligned}
 P(EX - a \leq X \leq EX + a) &= 0.9545 \\
 P\left(\frac{EX - a - EX}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{EX + a - EX}{\sigma}\right) &= 0.9545 \\
 P\left(\frac{-a}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{a}{\sigma}\right) &= 0.9545 \\
 \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right) &= 0.9545 \\
 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) &= 0.9545 \\
 \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) &= 0.47725 \\
 \frac{a}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0.47725) \\
 \frac{a}{\sigma} &= 2 \\
 \frac{a}{4} &= 2 \\
 a &= 8.
 \end{aligned}$$

Dakle, simetrični interval je $[-3 - 8, -3 + 8] = [-11, 5]$.

ZADATAK 5.9. *Kada čovjek sjedi na balkonu, komarci ga bodu intenzitetom $a_1 = 0.02$ uboda u sekundi, a kada uđe u sobu, onda se intenzitet smanji na $a_2 = 0.005$ uboda u sekundi. Ako je čovjek proveo 10 minuta na balkonu, a zatim 30 minuta u sobi, koliki je očekivani broj uboda za to vrijeme?*

Neka je X_1 - broj uboda na balkonu, X_2 - broj uboda u sobi, t_1 - vrijeme provedeno na balkonu, t_2 - vrijeme provedeno u sobi. Tada slučajna varijabla X_1 ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda_1 = a_1 \cdot t_1 = 0.02 \cdot 600 = 12$, a X_2 ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda_2 = a_2 \cdot t_2 = 0.005 \cdot 1800 = 9$. Očekivani broj uboda je:

$$E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 12 + 9 = 21.$$

ZADATAK 5.10. "Na gomili 40 Slovaka, koliko je među njima lijevaka?" Ako je 8% stanovništva lijevoruko, izračunati traženi broj s vjerojatnošću od 0.80 i 0.99.

Neka je slučajna varijabla X - broj lijevorukih među Slovcima. Tada X ima $\mathcal{B}(40; 0.08)$ razdiobu. Po teoremu Moivre-Laplace je $\mathcal{B}(40; 0.08) \approx \mathcal{N}(3.2; 2.944)$. Sada tražimo takav k da je

$$P(|X - EX| \leq k) = p, \quad p \in \{0.80, 0.99\}.$$

Kao i ranije,

$$\begin{aligned} P(EX - k \leq X \leq EX + k) &= p \\ 2\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2.944}}\right) &= p \end{aligned}$$

Za $p = 0.80$ imamo da je

$$\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2.944}}\right) = 0.4,$$

odnosno $k = \sqrt{2.944} \cdot \Phi^{-1}(0.4)$; prihvaćamo $k \approx 2.196$. To znači da je $3.2 - 2.196 = 1.004 \leq X \leq 3.2 + 2.196 = 5.396$ što bi odgovaralo procjeni od $1 \leq X \leq 6$.

Ako je $p = 0.99$, na sličan način zaključujemo da je $k \approx 4.42$, tj. $0 \leq X \leq 8$. Dakle, maksimalno ih je 8.

POGLAVLJE 3

Numerička matematika

Prilikom rješavanja raznih problema koje možemo opisati matematičkim modelom često dolazimo do poprilično složenih zadataka za čije su rješavanje potrebni snažniji matematički alati, ili su pak zadaci toliko složeni da niti jedan analitički način rješavanja ne dovodi do rješenja. U tom slučaju potrebne su nam određene metode pomoću kojih ćemo na relativno jednostavan način i u relativno kratkom vremenu doći do približnog (numeričkog) rješenja. Problemom nalaženja i razrađivanja metoda koje će nam dati zadovoljavajuća numerička rješenja raznih problema iz drugih oblasti matematike bavi se **numerička matematika**.

1. Račun grešaka

Ako se neka fizikalna pojava matematički interpretira, najčešće se bira idealizirani model čije rješenje odražava samo približnu sliku onoga što se u realnosti događa.

U numeričkoj matematici nailazimo na takve procese čija bi realizacija trajala beskonačno. U praksi smo prisiljeni prekinuti postupak računanja nakon određenog broja koraka. Samim skraćivanjem trajanja računanja činimo grešku koja se naziva **greškom analitičkog odsjecanja**.

Drugi problem prilikom opisivanja neke fizikalne pojave je preciznost mjerenja ulaznih podataka. Time nastaju **početne greške**.

I treća situacija kada nastaju greške je kada brojeve sa velikim brojem znamenaka koje najčešće ne stanu u memoriju računala moramo zamijeniti sa približnim brojevima sa manjim brojem znamenaka. Ove greške su **greške zaokruživanja**.

1.1. Približni brojevi.

DEFINICIJA 14. *Približnim brojem x^* zovemo onaj broj koji se "neznatno" razlikuje od točne vrijednosti x i koji zamjenjuje broj x u izračunavanjima.*

DEFINICIJA 15. Razlika $e = x - x^*$ zove se **greškom približnog broja x^*** . **Apsolutna greška** je $A_x = |e| = |x - x^*|$.

Najčešće broj x ne znamo, pa ne možemo odrediti apsolutnu grešku. Ono što možemo zadati je **granica apsolutne greške Δ_x**

$$A_x \leq \Delta_x,$$

koja je racionalna. Apsolutna greška je nepraktična i ona je beskonačno decimalan razlomak, na primjer:

$$\sqrt{2} \approx 1.41, \quad A_x = |\sqrt{2} - 1.41| = 0.0042 \dots, \quad \Delta_x = 0.005$$

i A_x nije od veće koristi. Konvencija kaže da kada imamo gornju granicu apsolutne greške Δ_x , govorimo apsolutna greška.

1.2. Osobine apsolutne greške. Označimo s $\Delta_a, \Delta_b, \dots$ gornje granice apsolutnih grešaka točnih brojeva a, b, \dots umjesto kojih računamo s njima pridruženim približnim brojevima a^*, b^*, \dots . Tada vrijede sljedeće osobine:

1. Neka je $\alpha > 0$ poznata konstanta, nezavisna od a . Tada je $\Delta_{\alpha a} = |\alpha| \Delta_a$.
2. $\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b$;
3. $\Delta_{a \cdot b} = \Delta_a |b^*| + \Delta_b |a^*|$;
4. $\Delta_{a/b} = \frac{\Delta_a |b^*| + \Delta_b |a^*|}{(b^*)^2}$.

Osobina 4. ne preporučuje se za korištenje prigodom izračunavanja apsolutne greške kvocijenta za male vrijednosti nazivnika. Naime, u tom slučaju desna strana jednakosti nije stabilna - njena vrijednost postaje vrlo velika što numeričke programe, džepne kalkulatore zapravo "zbunjuje". Ali zato imamo efikasnu osobinu koja povezuje 1. i 2., a to je *apsolutna greška linearne kombinacije je linearna kombinacija apsolutnih grešaka*:

$$\Delta_{\alpha a + \beta b} = |\alpha| \Delta_a + |\beta| \Delta_b. \quad (53)$$

Gornje osobine se matematički mogu objasniti preko definicije gornje granice apsolutne greške, jer na primjer na osnovu nejednakosti trokuta vrijedi

$$\Delta_{a+b} = |(a+b) - (a+b)^*| = |a+b-a^*-b^*| \leq |a-a^*| + |b-b^*| = \Delta_a + \Delta_b,$$

što znači da je $\Delta_{a+b} \leq \Delta_a + \Delta_b$. Da bi dostigli traženu jednakost umjesto \leq , balansiramo s gornjom granicom apsolutne greške na lijevoj, manjoj strani. Slično postupamo i u izvođenju ostalih osobina.

DEFINICIJA 16. **Relativna greška** r približnog broja x^* je količnik greške i točnog broja x (kojeg moramo zamijeniti približnim brojem x^* u računanju)

$$r_x = \frac{e}{x^*},$$

a **apsolutna vrijednost relativne greške** je

$$R_x = \frac{A_x}{|x^*|}.$$

Inače, uobičajeno je reći *relativna greška* za apsolutnu vrijednost relativne greške. Napomenimo da je relativno grešku uobičajeno prikazivati u postocima. Dakle, ako se kod prikazivanja baždarenosti nekog mjernog instrumenta navode granice u kojima je instrument efikasan i pouzdan, tada se oznaka $x \pm \xi\%$ odnosi na relativnu pogrešku instrumenta u granicama $\delta_x \leq \xi$.

DEFINICIJA 17. *Gornja granica apsolutne vrijednosti relativne greške* R_{x^*} približnog broja x^* je svaki broj δ_x koji nije manji od apsolutne vrijednosti relativne greške tog broja.

$$R_x = \frac{A}{|x^*|} \leq \frac{\Delta_x}{|x^*|} = \delta_x$$

1.3. Osobine relativne greške. Ako zadržimo već ranije korištene oznake $\delta_a, \delta_b, \dots$ gornje granice apsolutnih vrijednosti relativnih grešaka točnih brojeva a, b, \dots umjesto kojih računamo s njima pridruženim približnim brojevima a^*, b^*, \dots , vrijede sljedeće osobine:

1. $\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b$.
2. Neka je $\alpha > 0$ poznata konstanta, nezavisna od a . Tada je $\delta_{a^\alpha} = |\alpha| \delta_a$.
3. $\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$;
4. $\delta_{a \pm b} = \frac{|a^*| \delta_a}{|a^* \pm b^*|} + \frac{|b^*| \delta_b}{|a^* \pm b^*|}$.

Osobine 1., 2. i 3. su od velike koristi kada se procjenjuje apsolutna greška Δ nekog numeričkog izraza koji sadrži množenje, dijeljenje i/ili potenciranje. Primjetimo da operator δ relativne greške djeluje na produkt kao logaritam ($\log a \cdot b = \log a + \log b$).

Napokon, osobina 4. postaje problematična, nestabilna kada je riječ o razlici, a izrazi a, b su bliski po vrijednosti. Stoga možemo zaključiti da je za **grešku zbroja i razlike zadužena je apsolutna**, a za **grešku produkta, kvocijenta i potencije relativna greška**. To

možemo sažeti u sljedeće dvije vrlo korisne formule:

$$\begin{aligned}\Delta_{a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_r} &= \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \dots + \Delta_{a_r}, \\ \Delta_{a_1^{\pm 1} a_2^{\pm 1} \dots a_r^{\pm 1}} &= \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_r}.\end{aligned}$$

Na kraju, primjera radi, izvedimo osobinu 3:

$$\delta_{a/b} = \delta_{a \cdot b^{-1}} = \delta_a + \delta_{b^{-1}} = \delta_a + |-1| \delta_b = \delta_a + \delta_b,$$

što je i trebalo dokazati. Usput smo koristili osobine 1. i 2., i to u drugoj i trećoj jednakosti respektivno.

1.4. Predstavljanje brojeva. Svaki realan broj x možemo napisati u obliku:

$$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \dots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \dots).$$

DEFINICIJA 18. Znamenka α_i je **značajna znamenka** približnog broja x^* ako je:

- a) $\alpha_i \neq 0$,
- b) Ako je $\alpha_i = 0$ i ako se nalazi između znamenaka različitih od 0,
- c) $\alpha_i = 0$ i ako čuva dekadsku jedinicu na čijem se mjestu nalazi.

DEFINICIJA 19. Značajna znamenka α_k približnog broja x^* je **sigurna znamenka** ako je

$$A_x \leq \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad 0 < \omega \leq 1.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ su **sigurne u užem smislu** ako je $\omega = \frac{1}{2}$, a u **širem smislu** ako je $\omega = 1$.

1.5. Zaokruživanje brojeva.

- (1) Postepeno zaokruživanje:
 - (a) Ako je znamenka koju odbacujemo manja od 5, onda znamenke koje ostaju ne mijenjaju se.
 - (b) Ako je znamenka koju odbacujemo veća od 5, onda posljednju znamenku koju ostavljamo uvećamo za 1.
- (2) Direktno zaokruživanje:
 - (a) Ako je prva od znamenaka koje odbacujemo 5, a ostale iza nje nisu sve nule, onda posljednju zadržanu znamenku uvećamo za 1.
 - (b) Ako je prva od znamenaka koje odbacujemo 5, a ostale iza nje su sve nule, onda ako je posljednja zadržana znamenka parna, ne mijenjamo ju, a ako je posljednja zadržana znamenka neparna, uvećamo ju za 1.

1.6. Greške izračunavanja vrijednosti funkcije.

1.6.1. *Funkcije jedne varijable.* Neka je $y = f(x)$ zadana funkcija, Δ_x apsolutna greška argumenta, koji zaokružujemo na $x \approx x^*$. Pretpostavimo da je funkcija derivabilna u nekoj okolini x^* , koja sadrži i x . Lako nalazimo apsolutnu grešku argumenta Δ_x , za koju procjenjujemo grešku funkcije:

$$\Delta_y = |f(x) - f(x^*)|.$$

Budući da je f derivabilna u okolini x^* , primjenjujemo teorem Lagrangea o diferencijalnoj srednjoj vrijednosti:

$$\Delta_y = |f'(\xi)(x - x^*)| \approx |f'(x^*)| \Delta_x.$$

Opet balansiramo s gornjim granicama apsolutnih grešaka tako, da \approx postane egzaktno $=$. Zaključujemo da je

$$\Delta_y = |f'(x^*)| \Delta_x. \quad (54)$$

Ako sada promotrimo relativnu grešku funkcije, lako vidimo da je

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|f(x^*)|} = \frac{|f'(x^*)|}{|f(x^*)|} \cdot \Delta_x = |[\ln f(x^*)]'| \Delta_x. \quad (55)$$

1.6.2. *Apsolutne i relativne greške funkcija.* Primjenjujući formule (54) i (55) na neke elementarne funkcije možemo dobiti niz korisnih i zanimljivih osobina. tako vrijede sljedeće formule:

1. $\Delta_{x^\alpha} = |\alpha| \delta_x$;
2. $\Delta_{e^x} = \delta_x$;
3. $\Delta_{\ln x} = \frac{\delta_x}{|\ln x^*|}$;
4. $\Delta_{\sin x, \cos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x} \leq \Delta_x$;
5. $\Delta_{\tan x, \cot x} \geq \Delta_x$.

Naročito je zanimljiva osobina 2. Preko nje možemo definirati i eksponencijalnu funkciju, kao onu funkciju čija je apsolutna greška jednaka relativnoj grešci argumenta. Drugim riječima može se pokazati da je jedno od rješenja funkcionalne jednadžbe

$$\Delta_f = \delta_x \quad x \in \mathbb{R}$$

funkcija $f(x) = e^x$.

1.6.3. *Inverzna zadaća izračunavanja vrijednosti funkcije.* Pretpostavimo da je $f \in C^1$, tj. da je f diferencijabilna u intervalu koji sadrži x, x^* i neka točka $(x^*, f(x^*))$ nije točka ekstrema. Tada obrat formule

(54) postaje

$$\Delta_x = \frac{\Delta_y}{|f'(x^*)|}. \quad (56)$$

Dakle, ako imamo zadanu grešku funkcije, preko (56) nalazimo potrebnu točnost izračunavanja, mjerenja, određivanja vrijednosti argumenta.

1.7. Izračunavanje vrijednosti funkcije više varijabli. Promatramo realnu funkciju više realnih varijabli $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, tj. $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, koja je derivabilna barem jednom po svakom svom argumentu x_j . Totalni diferencijal

$$dy = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} dx_n$$

i prirast

$$\Delta_y = |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*)|$$

funkcije $y = f(\mathbf{x})$ u nekoj približnoj točki $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ su usko povezani. Naša je zadaća ocijeniti apsolutno grešku funkcije f - što je modul prirasta Δ_y , koja nastaje prilikom zamjene $x_j^* \mapsto x_j, j = \overline{1, n}$ u aproksimaciji $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^*)$.

Neka je $y = f(\mathbf{x})$ zadana funkcija, derivabilna u okolini točaka \mathbf{x}, \mathbf{x}^* , po svakoj varijabli $x_j, j = \overline{1, n}$, i neka su $\Delta_{x_1}, \dots, \Delta_{x_n}$ apsolutne greške argumenata. Tada je gornja granica apsolutne greške vrijednost funkcije

$$\Delta_y = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j}, \quad (57)$$

dok je gornja granica apsolutne vrijednosti relativne greške vrijednost funkcije

$$\delta_y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(\mathbf{x}^*)} \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j} = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j}.$$

1.8. Određivanje grešaka argumenata na temelju zadane greške funkcije.

1.8.1. *Metoda proporcionalnih utjecaja.* Promotrimo volumen $V(r, H) = r^2 \pi H$ valjka visine H , polumjera osnovice r takvog, da je $r \ll H$, tj. da je polumjer mnogo manji od visine - hrvatski: fizički model je dugačak štap. Promjena visine, zatim polumjera za isto $\Delta > 0$ donosi promjene volumena

$$V(r + \Delta, H) - V(r, H + \Delta) = 2\Delta r \pi H > 0,$$

iz čega slijedi da ma kako malo bilo Δ , velika dužina štapa $H = H_1/\Delta$ će ga "pojesti", prema tome jednaki utjecaji različitih parametara na vrijednost funkcije ne smiju se uzeti u obzir bez ozbiljnih sumnji u točan krajnji ishod računanja. (S druge strane jednu jednadžbu (57) moramo riješiti po $n > 1$ nepoznanica, što se jednoznačno nemoguće uraditi)!

Stoga u matematičkom modelu izračunavanja vrijednosti funkcije $y = f(\mathbf{x}^*)$ koji zadovoljava uvjete relacije (57) uz zadani nivo apsolutne greške funkcije Δ_y pretpostavljamo međuutjecaje varijabli:

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} : \dots : \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right| \Delta_{x_n} = k_1 : \dots : k_n; \quad k_j > 0, j = \overline{1, n} \quad (58)$$

tada je

$$\Delta_{x_j} = \frac{k_j \Delta_y}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \sum_{j=1}^n k_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (59)$$

Zaista, transformiramo uvjete proporcija (58) u produženu jednakost

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \right| \frac{\Delta_{x_1}}{k_1} = \dots = \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right| \frac{\Delta_{x_n}}{k_n} = t,$$

odakle je

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j} = k_j t \quad (60)$$

za svaku varijablu. Zamjenjujemo potonje parcijalne derivacije u (57) i dobivenu jednadžbu riješimo po t :

$$t = \frac{\Delta_y}{\sum_{j=1}^n k_j}$$

što zajedno s (60) rezultira tvrdnjom (59).

1.8.2. *Metoda jednakih utjecaja.* Ako su za funkciju više varijabli svi utjecaji argumenata, barem približno, jednaki, tj. $\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right| \Delta_{x_j} = 1$ tada iz (59) neposredno slijedi

$$\Delta_{x_j} = \frac{\Delta_y}{n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right|} \quad j = \overline{1, n}. \quad (61)$$

1.9. Zadaci.

ZADATAK 1.1. Zaokruži sljedeće brojeve na tri značajne znamenke i odredi apsolutnu i relativnu grešku dobivenih približnih brojeva:

- a) 2.1514
- b) 0.16152
- c) 0.01204
- d) 1.225
- e) -0.0015281
- f) -392.85
- g) 0.1545
- h) 0.003922
- i) 625.55
- j) 94.525

- a) $x^* = 2.15$, $\Delta_x = 0.14 \cdot 10^{-2}$, $\delta_x = 0.65 \cdot 10^{-3}$
- b) $x^* = 0.162$, $\Delta_x = 0.48 \cdot 10^{-3}$, $\delta_x = 0.3 \cdot 10^{-2}$
- c) $x^* = 0.0120$, $\Delta_x = 0.4 \cdot 10^{-4}$, $\delta_x = 0.33 \cdot 10^{-2}$
- d) $x^* = 1.23$, $\Delta_x = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $\delta_x = 0.41 \cdot 10^{-2}$
- e) $x^* = -0.00153$, $\Delta_x = 0.19 \cdot 10^{-3}$, $\delta_x = 0.12 \cdot 10^{-2}$
- f) $x^* = -393$, $\Delta_x = 0.15$, $\delta_x = 0.38 \cdot 10^{-3}$
- g) $x^* = 0.155$, $\Delta_x = 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\delta_x = 0.32 \cdot 10^{-2}$
- h) $x^* = 0.00392$, $\Delta_x = 0.2 \cdot 10^{-5}$, $\delta_x = 0.51 \cdot 10^{-3}$
- i) $x^* = 626$, $\Delta_x = 0.45$, $\delta_x = 0.72 \cdot 10^{-3}$
- j) $x^* = 94.5$, $\Delta_x = 0.25 \cdot 10^{-1}$, $\delta_x = 0.26 \cdot 10^{-3}$

ZADATAK 1.2. Odredi broj značajnih znamenaka u broju x za zadani Δ_x :

- a) $x = 0.3941$, $\Delta_x = 0.25 \cdot 10^{-2}$
 - b) $x = 0.1132$, $\Delta_x = 0.1 \cdot 10^{-3}$
 - c) $x = 38.2543$, $\Delta_x = 0.27 \cdot 10^{-2}$
 - d) $x = 293.481$, $\Delta_x = 0.1$
 - e) $x = 2.325$, $\Delta_x = 0.1 \cdot 10^{-1}$
 - f) $x = 14.00231$, $\Delta_x = 0.1 \cdot 10^{-3}$
 - g) $x = 0.0842$, $\Delta_x = 0.15 \cdot 10^{-2}$
 - h) $x = 0.00381$, $\Delta_x = 0.1 \cdot 10^{-4}$
 - i) $x = -32.285$, $\Delta_x = 0.2 \cdot 10^{-2}$
 - j) $x = -0.2113$, $\Delta_x = 0.5 \cdot 10^{-2}$
- a) 2
 - b) 3
 - c) 4

- d) 3
- e) 2
- f) 5
- g) 1
- h) 2
- i) 4
- j) 2

ZADATAK 1.3. Zbroji zadane približne brojeve i odredi apsolutnu i relativnu pogrešku sume:

- a) $0.145 + 321 + 78,2$ (sve znamenke su značajne)
- b) $0.301 + 193.1 + 11.58$ (sve znamenke su značajne)
- c) $398.5 - 72.28 + 0.34567$ (sve znamenke su značajne)
- d) $x_1 + x_2 - x_3$, gdje su $x_1 = 197.6$, $\Delta_{x_1} = 0.2$, $x_2 = 23.44$, $\Delta_{x_2} = 0.22$, $x_3 = 201.55$, $\Delta_{x_3} = 0.17$

a)

$$\begin{aligned} 0.145 + 321 + 78.2 &= 0.1 + 321 + 78.2 \\ &= 399 \end{aligned}$$

Greške pribrojnika su:

$$\Delta_1 = 0.045, \quad \Delta_2 = 0.5, \quad \Delta_3 = 0.05,$$

greška koja nastaje zaokruživanjem zbroja na kraju je

$$\Delta_z = 0.3.$$

Dakle, ukupna apsolutna greška zbrajanja je:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_z = 0.9.$$

Relativnu grešku računamo po formuli i dobivamo:

$$\delta = \frac{\Delta}{399} = \frac{0.9}{399} = 0.0023.$$

- b) 205.0 , $\Delta = 0.07$, $\delta = 0.00034$
- c) 326.6 , $\Delta = 0.09$, $\delta = 0.00028$
- d) 19.5 , $\Delta = 0.6$, $\delta = 0.03$

ZADATAK 1.4. Izvrši sljedeće računске operacije i odredi apsolutnu i relativnu pogrešku rezultata (sve znamenke su značajne):

- a) $3.49 \cdot 8.6$
- b) $482.56 \cdot 7256 \cdot 0.0052$
- c) $0.144 : 1.2$
- d) $7.3 : 4491$

a)

$$3.49 \cdot 8.6 = 30.014 = 30.0$$

Apsolutne greške faktora su

$$\Delta_1 = 0.005, \quad \Delta_2 = 0.05,$$

pa pripadne relativne greške izračunamo po formuli:

$$\delta_1 = \frac{0.005}{3.49} = 0.0014, \quad \delta_2 = \frac{0.05}{8.6} = 0.0058.$$

Dakle, relativna greška produkta je:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0.0072,$$

a apsolutnu grešku dobijemo po formuli:

$$\Delta = 30 \cdot \delta = 0.2.$$

b) $18 \cdot 10^3$, $\delta = 0.28$, $\Delta = 0.18 \cdot 10^3$

c) 0.12 , $\delta = 0.046$, $\Delta = 0.55 \cdot 10^{-2}$

d) 0.0016 , $\delta = 0.007$, $\Delta = 0.11 \cdot 10^{-4}$

ZADATAK 1.5. *Izračunaj vrijednosti sljedećih funkcija i odredi apsolutnu i relativnu pogrešku funkcijske vrijednosti:*

a) $y = x^3 \sin x$ za $x = \sqrt{2}$, uzimajući $\sqrt{2} \approx 1.414$

b) $y = e^x \cos x$ za $x = \sqrt{3}$, uzimajući $\sqrt{3} \approx 1.732$

c) $u = \ln(x_1 + x_2^2)$, $x_1 = 0.97$, $x_2 = 1.132$ (sve znamenke su značajne)

d) $u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $x_1 = 2.104$, $x_2 = 1.935$, $x_3 = 0.845$ (sve znamenke su značajne)

a) Kako je $\sqrt{2} \approx 1.414$, apsolutna greška varijable je $\Delta_x = 0.0005$. Grešku funkcije računamo po formuli:

$$\Delta_y = |f'(x)|\Delta_x = |3x^2 \sin x + x^3 \cos x|\Delta_x = 0.0015.$$

Kako je

$$y = 1.414^3 \sin(1.414) \approx 0.07$$

relativna greška je:

$$\delta_y = \frac{0.0015}{0.07} = 0.02.$$

b) $y = 0.1046$, $\Delta_y = 0.37 \cdot 10^{-3}$, $\delta_y = 0.36 \cdot 10^{-3}$

c) Kako su sve znamenke varijabli značajne, apsolutne greške varijabli su $\Delta_{x_1} = 0.005$, $\Delta_{x_2} = 0.0005$. Grešku funkcije računamo po formuli:

$$\Delta_u = \left| \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} + \left| \frac{\partial u(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \right| \Delta_{x_2} = 0.27 \cdot 10^{-2}$$

Kako je

$$u = \ln(0.97 + 1.132) \approx 0.81$$

relativna greška funkcije je

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{u} = 0.33 \cdot 10^{-2}.$$

$$\text{d) } u = 7.48, \quad \Delta_u = 0.49 \cdot 10^{-2}, \quad \delta_u = 0.64 \cdot 10^{-3}$$

ZADATAK 1.6. *Nađi dopustive apsolutne greške argumenata za funkcije pod c) i d) u prethodnom zadatku uz koje se može izračunati vrijednost funkcije sa četiri značajne znamenke.*

2. Interpolacija

Na segmentu $[a, b]$ zadano je $n + 1$ točaka x_0, x_1, \dots, x_n (**čvorovi interpolacije**), kao i vrijednosti neke neprekidne funkcije $y = f(x) \in C[a, b]$ u tim točkama:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Takvo određivanje funkcije uglavnom zovemo *tabelarno*, dok je skup $\mathbb{U} = \{(x_j, y_j) : y_j = f(x_j), j = \overline{0, n}\}$ uzorak funkcije f .

Naša je zadaća procjena vrijednosti funkcije $f(\bar{x})$, kada je $\bar{x} \neq x_j$ **isključivo** na osnovu poznatih vrijednosti \mathbb{U} . To postizemo nalaženjem pomoćne funkcije F , tzv. (**funkcije interpolacije**) koja pripada nekoj određenoj klasi funkcija, tako da vrijedi **interpolacijsko svojstvo**

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (62)$$

Dobivenu interpolacionu formulu $y = F(x)$ koristimo za izračunavanje vrijednosti funkcije f u točki \bar{x} tako da je rješenje zadatka zapravo aproksimacija

$$f(\bar{x}) \approx F(\bar{x}).$$

Ako F pripada skupu polinoma, dobivamo **interpolacijske polinome** koji će biti n -tog stupnja, budući $\#\mathbb{U} = n + 1$.

Ako je $\bar{x} \in [x_0, x_n]$, radi se o **interpolaciji**, a ako je x van tog segmenta o **ekstrapolaciji**, koja može biti **ekstrapolacija unazad**, kada je $\bar{x} < x_0$ i **ekstrapolacija unaprijed**, u slučaju $\bar{x} > x_n$.

2.1. Lagrangeov interpolacioni polinom. Na segmentu $[a, b]$ zadan je uzorak $\mathbb{U} = \{(x_j, f(x_j)) : j = \overline{0, n}\}$. Tražimo polinom maksimalno n -tog stupnja $\mathcal{L}_n(x)$ koji ima interpolacijsko svojstvo

$$\mathcal{L}_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = \overline{0, n}. \quad (63)$$

Takav polinom je tzv. *Lagrangeov interpolacijski polinom*:

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x) \cdot y_j}{(x - x_j) \Pi'_{n+1}(x_j)}, \quad (64)$$

gdje je

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Zaista, ako potražimo $\mathcal{L}_n(x)$ u obliku

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(x) = & a_0(x - x_1) \cdots (x - x_n) \\ & + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ & + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned} \quad (65)$$

preko interpolacijskog svojstva (63) polinoma $\mathcal{L}_n(x)$ lako nalazimo nepoznate koeficijente a_0, a_1, \dots, a_n zamjenom $x = x_j, j = \overline{0, n}$ u obje strane relacije (65). Lagano slijedi da je

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\mathcal{L}_n(x_j)}{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)} \\ &= \frac{y_j}{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}. \end{aligned}$$

Zamijenimo nazad u (65) dobivene vrijednosti, odakle slijedi

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{x_0 - x_1 \cdots (x_0 - x_n)} y_0 + \cdots + \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} y_n.$$

Očigledne transformacije potonjeg izraza dovode do oblika (64) Lagrangeovog interpolacijskog polinoma.

Primjećujemo da čvorovi interpolacije ne moraju biti ekvidistantni kod $\mathcal{L}_n(x)$; ovaj polinom može se koristiti u bilo kojoj oblasti unutar ili izvan $[x_0, x_n]$ za procjenu vrijednosti funkcije aproksimacijom

$$f(\bar{x}) \approx \mathcal{L}_n(\bar{x}).$$

Ocjena greške kod ovakvih aproksimacija funkcije $f \in C^{n+1}$ Lagrangeovim interpolacionim polinomom je

$$|R_n(\bar{x})| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(\bar{x})|. \quad (66)$$

2.2.2. *Dijagonalna tablica razlika.*

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

2.3. Newtonovi interpolacioni polinomi. U uzorku $\mathbb{U} = \{(x_j, y_j) : j = \overline{1, n}\}$ zadajemo tzv. *ekvidistantne čvorove* tj. udaljenost između čvorova interpolacije je konstantna. Neka je

$$x_i = x_{j-1} + h = \dots = x_0 + j \cdot h \quad j = \overline{1, n}.$$

2.3.1. *Prvi Newtonov interpolacijski polinom.* Potražimo interpolacijski polinom u obliku

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (68)$$

Nepoznate koeficijente određujemo iz interpolacijskog svojstva $\mathcal{N}_n^{(1)}(x_j) = y_j, j = \overline{0, n}$. Zamjenom $x = x_j, j = \overline{0, n}$ u obje strane (68) direktno nalazimo:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Nekon kraćeg računanja dobivamo i da je

$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2 h^2},$$

odakle preko induktivne pretpostavke zaključujemo:

$$a_j = \frac{\Delta^j y_0}{j! h^j} \quad j = \overline{0, n}. \quad (69)$$

Radi pojednostavljenja uvodimo i oznaku

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Budući da nam trebaju izrazi oblika $(x - x_j)/h$ izraženi u funkciji od q , bit će :

$$\frac{x - x_j}{h} = \frac{x - x_0}{h} - \frac{x_j - x_0}{h} = q - j \quad j = \overline{0, n-1};$$

skupljajući sve potrebne izraze u (68) napokon je

$$\mathcal{N}_n^{(1)}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (70)$$

Već na prvi pogled vidimo da je načinom formiranja $\mathcal{N}_n^{(1)}(x)$ predodređen za procjenjivanje vrijednosti funkcije za $x = \bar{x}$ u okolini x_0 ; naravno, možemo primijenjivati prvi Newtonov interpolacijski polinom i za vrijednosti oko x_n , samo tada će greška interpolacije svakako porasti.

Greška interpolacije kod prvog Newtonovog interpolacionog polinoma, u slučaju poznavanja analitičkog izraza $f \in C^{n+1}(V)$, $[x_0, x_n] \subseteq V$ je

$$|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - \mathcal{N}_n^{(1)}(\bar{x})| \leq h^{n+1} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{|\bar{q}(\bar{q}-1)\cdots(\bar{q}-n)|}{(n+1)!}, \quad (71)$$

gdje je

$$\bar{q} = \frac{\bar{x} - x_0}{h}.$$

Inače, dodavanjem još jednog čvora x_{n+1} uzorku \mathbb{U} greška interpolacije procjenjuje se s

$$|R_n(\bar{x})| \leq \frac{|\Delta^{n+1} y_0 \bar{q}(\bar{q}-1)\cdots(\bar{q}-n)|}{(n+1)!}. \quad (72)$$

2.3.2. Drugi Newtonov interpolacioni polinom. Potražimo sada interpolacijski polinom počev od čvora x_n retrogradno u obliku

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n^{(2)}(x) &= b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ &+ \dots + b_n(x - x_n)\cdots(x - x_1). \end{aligned} \quad (73)$$

Nepoznate koeficijente b_j određujemo iz interpolacijskog svojstva

$\mathcal{N}_n^{(2)}(x_j) = y_j, j = \overline{0, n}$. Zamjenom $x = x_n, x = x_{n-1}, \dots, x = x_0$ u obje strane (73) dobivamo

$$b_0 = y_n, \quad b_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Nastavljajući postupak slijedi

$$b_j = \frac{\Delta y_{n-j}}{j! h^j} \quad j = \overline{0, n}. \quad (74)$$

U ovom slučaju je

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

što nam daje zaključak o vrijednosti

$$\frac{x - x_j}{h} = \frac{x - x_n}{h} + \frac{x_n - x_j}{h} = q + n - j \quad j = \overline{1, n}. \quad (75)$$

Vraćamo sve vrijednosti b_j zajedno s izračunatim transformiranim prirastima (75) u pretpostavljeni oblik drugog Newtonog interpolacijskog polinoma $\mathcal{N}_n^{(2)}(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n^{(2)}(x) &= y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} \\ &+ \dots + \frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned} \quad (76)$$

gdje je

$$q = \frac{x - x_n}{h}. \quad (77)$$

Vež zbog načina izvođenja nam je jasno da ovaj polinom koristimo za kraj interpolacijskog intervala, za procjenu vrijednosti funkcija u okolini čvora x_n .

Neka je $f \in C^{n+1}(W)$, $[x_0, x_n] \subseteq W$. Tada je greška kod drugog Newtonovog interpolacionog polinoma

$$|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - \mathcal{N}_n^{(2)}(\bar{x})| \leq h^{n+1} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{|\bar{q}(\bar{q}+1)\cdots(\bar{q}+n)|}{(n+1)!}, \quad (78)$$

dok ako u uzorku/tablici dodamo i čvor x_{n+1} tada je

$$|R_n(\bar{x})| \leq \frac{|\Delta^{n+1} y_0 \bar{q}(\bar{q}+1)\cdots(\bar{q}+n)|}{(n+1)!}, \quad (79)$$

u obje zadnje formule je

$$\bar{q} = \frac{\bar{x} - x_n}{h}.$$

2.4. Gaussovi interpolacioni polinomi. U Newtonovim formulama koriste se samo vrijednosti koje se nalaze na jednoj strani izabrane početne vrijednosti. Sada neka je zadano $(2n + 1)$ čvorova:

$$x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n$$

gdje je

$$\Delta x_i = h = \text{const}$$

i

$$f(x_i) = y_i.$$

Gaussovi interpolacioni polinomi koriste se za sredinu tablice razlika.

2.4.1. *Prvi Gaussov interpolacioni polinom.* Označimo

$$q = \frac{x - x_0}{h} > 0$$

i polinom je:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2n}^{(1)} = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots \\ & \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n+1} + \\ & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

2.4.2. *Drugi Gaussov interpolacioni polinom.* Sada je

$$q = \frac{x - x_0}{h} < 0$$

i polinom je:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2n}^{(2)} = & y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \dots \\ & \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ & + \frac{(q+n)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Greška je kod oba polinoma

$$|R_{2n}(\bar{x})| \leq \frac{h^{2n+1} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(2n+1)!} |\bar{q}(\bar{q}^2 - 1)(\bar{q}^2 - 2^2) \dots (\bar{q}^2 - n^2)|.$$

Ovdje je

$$\bar{q} = \frac{\bar{x} - x_0}{h},$$

dok je \bar{x} onaj argument u kojem procjenjujemo nepoznatu vrijednost funkcije.

Inače, kod Gaussovih interpolacijskih polinoma možemo imati i paran broj ulaznih čvorova u uzorku \mathbb{U} , a nije niti jednoznačno određeno gdje se nalazi središnji čvor x_0 . Stoga korisnik sam definira središnju vrijednost x_0 , tako da uvijek može, po afinitetima, koristiti ili prvi ili drugi Gaussov interpolacijski polinom. Naravno, izbacivanjem "nesimetričnih čvorova" iz \mathbb{U} uvijek možemo na uštrb točnosti procjene $f(\bar{x})$ konstruirati poduzorak s neparnim brojem simetrično raspoređenih čvorova.

U slučaju parnog broja čvorova koristimo onaj dio formule za grešku koji smo koristili prigodom računanja s $\mathcal{G}^{(1)}$, $\mathcal{G}^{(2)}$.

2.5. Inverzna interpolacija. Neka je funkcija $y = f(x)$, koja je monotona, zadana tablično uzorkom \mathbb{U} . Zadatak inverzne interpolacije je odrediti vrijednost argumenta \bar{x} ako je zadana vrijednost funkcije \bar{y} . Pretpostavimo da je posmatrani uzorak monoton po ordinatama i tako lagano lociramo mjesto gdje se nalazi u tablici \bar{y} ; mjesto pripadnog \bar{x} među **ekvidistantnim** čvorovima određuje koji od interpolacijskih polinoma $\mathcal{N}^{(1)}$, $\mathcal{N}^{(2)}$, $\mathcal{G}^{(1)}$, $\mathcal{G}^{(2)}$ koristimo.

Postupak inverzne interpolacije je sljedeći. Pretpostavimo da nam je adekvatan prvi Newtonov interpolacioni polinom (za ostale interpolacione polinome postupak dobivanja iterativne formule ide analogno):

$$\bar{y} = \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1) \dots (q-n+1).$$

Izrazimo q iz pribrojnika linearnog po q :

$$q = \frac{\bar{y} - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}q(q-1) - \dots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}q(q-1) \dots (q-n+1) =: \varphi(q); \quad (80)$$

što je iterativna funkcija. Za početnu iteraciju q_0 uzimamo pribrojnik *slobodan od* q

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}, \quad (81)$$

a svaku sljedeću iteraciju računamo po uobičajenoj iterativnoj proceduri

$$q_{n+1} = \varphi(q_n).$$

Nakon m iteracija dobijemo da je

$$q_m \equiv \bar{q} \approx \frac{x - x_0}{h},$$

odnosno

$$\bar{x} \approx x_0 + h\bar{q}.$$

Osnovno praktično pitanje u takvim primjenama je "kada stati s računanjem". Stoga napominjemo da je iterativnu proceduru uputno ponavljati do poklapanja određenog broja decimala kod uzastopnih iteracija, a taj broj je nužno bar za dva veći od broja decimala zadanih čvorova u \mathbb{U} .

Ako je \mathbb{U} zadan preko neekvidistantnih čvorova, koristimo Lagrangeov interpolacijski polinom i to tako, da izvršimo zamjenu $x \leftrightarrow y$ u (64):

$$\bar{x} = \sum_{j=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(\bar{y}) \cdot y_j}{(\bar{y} - y_j) \Pi'_{n+1}(y_j)}, \quad (82)$$

odnosno u razvijenom obliku

$$\bar{x} = \frac{(\bar{y} - y_1) \cdots (\bar{y} - y_n)}{(y_0 - y_1) \cdots (y_0 - y_n)} x_0 + \cdots + \frac{(\bar{y} - y_0) \cdots (\bar{y} - y_{n-1})}{(y_n - y_0) \cdots (y_n - y_{n-1})} x_n. \quad (83)$$

Napominjemo da se možemo nadati jednoznačnom rješenju u inverznoj interpolaciji isključivo u slučaju uzorka \mathbb{U} monotonog po ordinatama.

2.6. Zadaci.

ZADATAK 2.1. Naći Lagrangeov interpolacioni polinom tabelarno zadane funkcije $y = f(x)$.

x	-1	0	2
y	2	3	4

Ocijeniti $f'(1)$ pomoću Lagrangeovog interpolacionog polinoma.

Kako u tablici imamo 3 čvora ($n = 2$), Lagrangeov interpolacioni polinom glasi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \\ &= \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} \cdot 2 + \frac{(x + 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 2)} \cdot 3 + \frac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 0)} \cdot 4 \\ &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 3. \end{aligned}$$

Želimo procijeniti vrijednost koeficijenta smjera tangente $f'(1)$. Budući da procjenu radimo pomoću $f'(\bar{x}) \approx \mathcal{L}'_n(\bar{x})$, deriviramo interpolacioni

polinom i uvrstimo zadanu točku.

$$\mathcal{L}'_2(x) = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{6}$$

$$\mathcal{L}'_2(1) = \frac{-2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

ZADATAK 2.2. *Naći Lagrangeov interpolacioni polinom uzorka funkcije $y = f(x)$*

x	-9	-7	-6
y	1	2	4

Ocijeniti $f(-2\pi)$.

ZADATAK 2.3. *Zadana je tablica:*

$$\begin{aligned}\log 1 &= 0.000 \\ \log 2 &= 0.301 \\ \log 3 &= 0.477 \\ \log 4 &= 0.602 \\ \log 5 &= 0.699\end{aligned}$$

Izračunajte brojeve $\log 1.7$, $\log 2.5$, $\log 3.1$, $\log 4.6$.

Formirajmo tablicu konačnih razlika:

x	$y = \log x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	0.000	0.301	-0.125	0.074	-0.051
2	0.301	0.176	-0.051	0.023	
3	0.477	0.125	-0.028		
4	0.602	0.097			
5	0.699				

Kako se $x = 1.7$ nalazi na početku tablice konačnih razlika, za računanje koristimo prvi Newtonov interpolacioni polinom. Pripadni q je

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.7 - 1}{1} = 0.7,$$

a polinom glasi:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_4^{(1)}(x) &= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \\ &+ \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_4^{(1)}(1.7) &= 0.000 + 0.7 \cdot 0.301 + \frac{0.7(0.7-1)}{2!}(-0.125) \\ &\quad + \frac{0.7(0.7-1)(0.7-2)}{3!}(0.074) + \\ &\quad + \frac{0.7(0.7-1)(0.7-2)(0.7-3)}{4!}(-0.051) \\ &= 0.2107 + 0.013125 + 0.003367 + 0.001334287 \\ &= 0.228.\end{aligned}$$

Za $x = 4.6$ sa kraja tablice koristimo drugi Newtonov interpolacioni polinom. Sada je q oblika:

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{4.6 - 5}{1} = -0.4,$$

a polinom je oblika:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_4^{(2)}(x) &= y_4 + q\Delta y_3 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_1 + \\ &\quad + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\Delta^4 y_0; \\ \mathcal{N}_4^{(2)}(4.6) &= 0.699 + (-0.4) \cdot 0.097 + \frac{-0.4(-0.4+1)}{2!}(-0.028) + \\ &\quad + \frac{-0.4(-0.4+1)(-0.4+2)}{3!}(0.023) + \\ &\quad + \frac{-0.4(-0.4+1)(-0.4+2)(-0.4+3)}{4!}(-0.051) \\ &= 0.699 - 0.0388 + 0.00336 - 0.001472 + 0.0021216 \\ &= 0.664.\end{aligned}$$

Za $x = 2.5, 3.1$, koji su na sredini tablice razlika, koristit ćemo Gaussove interpolacione polinome. Koji ćemo od njih koristiti ovisit će o q . Preindeksiramo tablicu razlika:

n	x	$y = \log x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	1	0.000	0.301	-0.125	0.074	-0.051
-1	2	0.301	0.176	-0.051	0.023	
0	3	0.477	0.125	-0.028		
1	4	0.602	0.097			
2	5	0.699				

Za $x = 2.5$ je q

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2.5 - 3}{1} = -0.5 < 0,$$

pa koristimo 2. Gaussov interpolacioni polinom koji glasi:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4^{(2)}(x) &= y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q-1)q(q+1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\ &\quad + \frac{(q-1)q(q+1)(q+2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}; \\ \mathcal{G}_4^{(2)}(2.5) &= 0.477 + (-0.5) \cdot 0.176 + \frac{-0.5(-0.5+1)}{2!}(-0.051) + \\ &\quad + \frac{(-0.5-1)(-0.5)(-0.5+1)}{3!}(0.074) + \\ &\quad + \frac{(-0.5-1)(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)}{4!}(-0.051) \\ &= 0.477 - 0.088 + 0.006375 + 0.004625 + 0.001195312 \\ &= 0.401.\end{aligned}$$

Za $x = 3.1$ q je

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3.1 - 3}{1} = 0.1 > 0$$

pa koristimo 1. Gaussov interpolacioni polinom:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4^{(1)}(x) &= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q-1)q(q+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ &\quad + \frac{(q-2)(q-1)q(q+1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}; \\ \mathcal{G}_4^{(2)}(2.5) &= 0.477 + 0.1 \cdot 0.125 + \frac{0.1(0.1-1)}{2!}(-0.051) + \\ &\quad + \frac{(0.1-1)0.1(0.1+1)}{3!}(0.023) + \\ &\quad + \frac{(0.1-2)(0.1-1)0.1(0.1+1)}{4!}(-0.051) \\ &= 0.477 + 0.0125 + 0.00295 - 0.0003795 - 0.000399712 \\ &= 0.491.\end{aligned}$$

ZADATAK 2.4. Izračunajte $f(1.23)$ ako je funkcija f zadana tablično:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
y	2.0000	2.1576	2.3310	2.5203	2.7280	2.9531	3.1970	3.4604

Rješenje: $f(1.23) = 2.86084$.

ZADATAK 2.5. Nađite $\log 1044$ ako je zadano:

x	1000	1010	1020	1030	1040	1050
y	3.0000000	3.0043214	3.0086002	3.0128372	3.0170333	3.0211893

Rješenje: $\log 1044 = 3.0187005$.

ZADATAK 2.6. Dana je tablica funkcije sinus od 15° do 55° . Traže se vrijednosti $\sin 14^\circ$ i $\sin 56^\circ$ na osnovu zadanog uzorka \mathbb{U} .

x°	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

Rješenje: $\sin 14^\circ = 0.2416$, $\sin 56^\circ = 0.8291$.

ZADATAK 2.7. Dana je tablica Laplaceove funkcije

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

x	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
y	0.9523	0.9661	0.9763	0.9838	0.9891	0.9928	0.9953

Izračunajte $\Phi(1.43)$.

Rješenje: $\Phi(1.43) = 0.9569$.

3. Numeričko rješavanje jednadžbi

Neka je zadana jednadžba $f(x) = 0$, gdje je funkcija definirana i neprekidna na nekom (konačnom) segmentu $[a, b]$. U situacijama kada ne možemo analitički riješiti zadanu jednadžbu koristimo se jednom od metoda za numeričko (približno) rješavanje jednadžbi.

3.1. Metoda polovljenja. Neka je $f \in C[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ i neka je

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Bolzanov teorem garantira egzistenciju nekog $c \in (a, b)$ da je $f(c) = 0$ ¹. Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

¹Čuveni Bolzanov teorem može se poopćiti i ovako: *Ako je funkcija neprekidna na intervalu $[a, b]$, tada postoji $c \in [a, b]$ uzima svaku vrijednost V iz kodomene barem jedanput, tj. $f(c) = V$.*

odmah dobijemo da je $c = \frac{a+b}{2}$ traženo rješenje. No, ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$$

bira se onaj od segmenata

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

u čijim krajevima funkcija f ima suprotan predznak. Taj interval neka je $[a_1, b_1]$. Ponavljanjem postupka dobiva se niz segmenata

$$[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

sa svojstvom da je

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0,$$

i

$$\xi_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Greška metode $\epsilon > 0$ nakon n polovljenja mora biti

$$\epsilon < \frac{b-a}{2^n},$$

što je istovremeno i kriterij izlaska iz iteracijske petlje polovljenja.

3.2. Metoda sekante. Promatramo funkciju $y = f(x)$ na intervalu $x \in [a, b]$ takvom da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Na tom intervalu tražimo njenu nultočku, tj. rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$. Teorem Bolzana garantira egzistenciju takve točke $x = c$.

Imamo dva slučaja, u ovisnosti u kojem rubu je funkcijska vrijednost veća od nule. U oba slučaja pretpostavljamo da je ispunjeno

$$f \in C^2[a, b], \quad f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \text{i} \quad f', f'' \text{ su konstantnog znaka na } [a, b].$$

U oba slučaja povlačimo sekantu funkcije kroz točke $f(a)$ i $f(b)$. Sječište sekante sa $0x$ -osi x_1 je prva aproksimacija korjena jednadžbe. Ako je $f(x_1) = 0$, našli smo rješenje. Ako je $f(x_1) \neq 0$, postupak nastavimo spajajući sekantom $f(x_1)$ sa $f(a)$ (slika 1), odnosno sa $f(b)$.

Ako je $f(a) > 0$, tada korijen jednadžbe $f(x) = 0$ računamo po rekurzivnoj formuli:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \quad (84)$$

a za početnu aproksimaciju uzimamo $x_0 = b$. Odsta, jednadžba pravca kroz dvije zadane točke $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ je

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

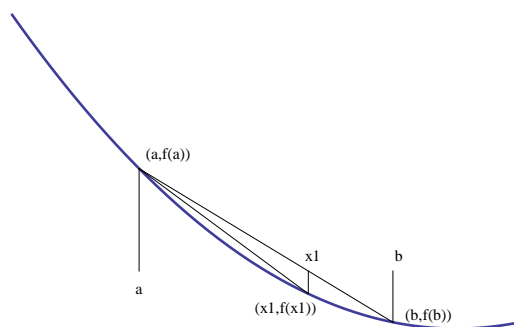
što za $y = 0$ daje

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Zamjenom $A_n(x_n, f(x_n)) \mapsto B(b, f(b))$ dobivamo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - \frac{f(a)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} = x_n + (a - x_n) + \frac{f(a)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \\ &= x_n + (a - x_n) \left(1 + \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)} \right) \end{aligned}$$

što je ekvivalentno (84).



SLIKA 1. $f(a) > 0$

Kada je $f(a) < 0$ (slika 2), tada korijen jednadžbe $f(x) = 0$ nalazimo iterativno po rekurzivnoj formuli:

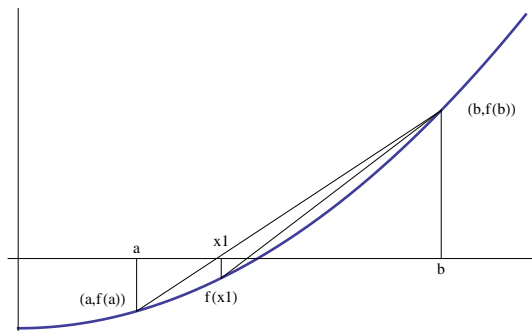
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \quad (85)$$

dok je početna aproksimacija $x_0 = a$.

U oba slučaja greška je:

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{[a,b]} |f'(x)|}. \quad (86)$$

Sumirajući ove izvode nalazimo da vrijedi rezultat.

SLIKA 2. $f(a) < 0$

TEOREM 8. Neka je $f \in C^2[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$; f' , f'' su konstantnog znaka na $[a, b]$. Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c, \quad (87)$$

gdje je c jedinstveno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. Niz (x_n) je rekursivno definiran preko

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} & f(a) > 0 \\ x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} & f(a) < 0 \end{cases}. \quad (88)$$

DOKAZ. Prvo dokazujemo konvergenciju niza $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Neka je $f(a) > 0$, $f' < 0$, $f'' > 0$ (Slika 1). Iz

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} = -\frac{- \cdot +}{-} < 0$$

vidimo da je niz (x_n) strogo monotono padajući. Niz je ograničen odozgo s $x_n > c$, što je posljedica monotonosti ($f' < 0$) i konveksnosti ($f'' > 0$). Budući da svaki monotoni, ograničeni niz konvergira, postoji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma \in [a, b].$$

U drugom koraku dokazujemo da je γ rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. U tom cilju neka $n \rightarrow \infty$ u rekursivnoj formuli (84). Zbog neprekidnosti f , $\lim_{n \rightarrow \infty}$ prolazi funkcijom i dobivamo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \frac{f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - a)}{f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) - f(a)}$$

odnosno

$$\gamma = \gamma - \frac{f(\gamma)(\gamma - a)}{f(\gamma) - f(a)},$$

što daje $f(\gamma) = 0$. Dakle, γ je rješenje jednadžbe $f(x) = 0$.

Napokon preostaje da pokažemo kako je $\gamma \equiv c$. Očito vrijedi na osnovu teorema Lagrangea o diferencijalnoj srednjoj vrijednosti da je

$$0 = f(\gamma) - f(c) = f'(\eta)(\gamma - c)$$

gdje je η između γ i c . No, kako je $f'(\eta) \neq 0$ na $[a, b]$, očigledno je $c = \gamma$. Monotonost $f(x)$ garantira jedinstvenost rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. \square

3.3. Metoda tangente (Newtonova metoda). Pretpostavimo da za funkciju f vrijedi $f \in C^2[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$ i da su f' , f'' konstantnog znaka na $[a, b]$. Zadaća nam je naći nultočku c funkcije $f(x)$ unutar (a, b) . Egzistenciju jedinstvene nultočke garantira Bolzanov teorem, ako se primijeni na monotone funkcije - budući f' je konstantnog znaka na $[a, b]$, monotonost je pretpostavljena.

Postavljamo tangentu na luk funkcije $y = f(x)$ u onom kraju intervala $[a, b]$ za koji vrijedi $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, $x_0 \in \{a, b\}$. Jednadžba tangente na funkciju u točki $T_0(x_0, f(x_0))$ je

$$(t): \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nalazimo sjecište x_1 tangente (t) s $0x$ -osi:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ako je $f(x_1) = 0$, našli smo korijen jednadžbe. Ako nije postavljamo novu tangentu u točki $T_1(x_1, f(x_1))$ i ponovimo postupak. Nakon n koraka dobivamo rekuzivnu formulu za aproksimaciju korijena:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

TEOREM 9. *Neka je $f \in C^2[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i neka su f' , f'' konstantnog znaka na intervalu $[a, b]$. Definiramo niz $(x_n)_{\mathbb{N}_0}$ rekuzivnom formulom*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in \{a, b\}: f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (89)$$

Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c, \quad (90)$$

gdje je $c \in (a, b)$ jedinstveno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, tj. $f(c) = 0$.

DOKAZ. Neka je $f(a) > 0$, $f' < 0$ i neka je f konvkesna funkcija, tj. $f'' > 0$. Prvo dokazujemo konvergenciju niza (x_n) . Iz (89)

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = - \cdot \frac{+}{-} > 0$$

vidimo da nix (x_n) monotono raste a istovremeno je niz ograničen odozgo s c . Dakle, niz je kovenregentan i postoji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma.$$

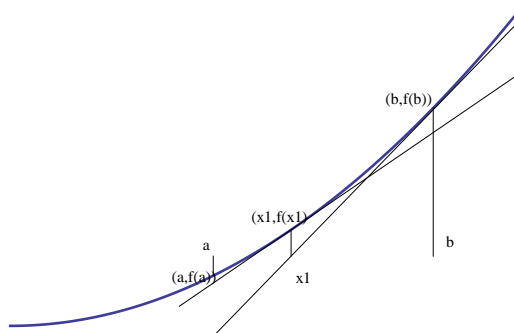
Sada dokazujemo da je γ rješenje jednadžbe $f(x) = 0$ dozvoljenim graničnim prijelazom ² kada $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \frac{f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)}{f'(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)}$$

što daje

$$\gamma = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}.$$

Iz ove relacije slijedi da je $f(\gamma) = 0$, dakle, γ zaista jeste rješenje. Da je rješenje jedinstveno, tj. da je $\gamma = c$, dokazujemo na isti način kao kod Teorema 8 u metodi sekante. \square



SLIKA 3. $f(a) < 0$

3.4. Metoda iteracije. Pretpostavimo da je $f \in C[a, b]$ i da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Na osnovu teorema Bolzana zagarantirano je barem jedno rješenje $c \in (a, b)$ jednadžbe $f(x) = 0$. Zamijenimo je ekvivalentnom jednadžbom

$$x = \varphi(x). \quad (91)$$

²Kako je $f \in C^1[a, b]$ istovremeno je i $f \in C[a, b]$, a za neprekidne funkcije granična vrijednost "prolazi" funkcijom.

Funkciju $\varphi(x)$ zovemo *iterativna funkcija*. Uzimamo na sreću nultu aproksimaciju rješenja x_0 i zamijenimo je u desnu stranu pomoćne jednadžbe (91). Dobivamo

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

ponavljajući ovaj postupak dolazimo do

$$x_2 = \varphi(x_1),$$

sve dok ne odredimo tzv. *iterativni niz* brojeva

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (92)$$

Ako ovaj niz brojeva (x_n) konvergira, označimo njenu graničnu vrijednost s $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma$, i iz neprekidnosti f i (92) zaključujemo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = \varphi(\gamma). \quad (93)$$

Stoga je γ također rješenje polazne jednadžbe, koje se preko numeričkog postupka (92) može odrediti s željenoj točnosti.

Dovoljan uvjet za konvergenciju ove procedure daje sljedeći rezultat.

TEOREM 10. *Neka je $f \in C^1[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada, ako postoji $q \in (0, 1)$ da je*

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad x \in (a, b) \quad (94)$$

tada proces

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (95)$$

konvergira bez obzira na izbor početne vrijednosti $x_0 \in [a, b]$, i

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (96)$$

je jedinstveno rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$.

DOKAZ. Na diferenciju

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}),$$

primijenimo Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti:

$$x_{n+1} - x_n = \varphi'(\bar{x}_n)(x_n - x_{n-1}),$$

gdje je ili $\bar{x}_n \in (x_{n-1}, x_n)$ ili $\bar{x}_n \in (x_n, x_{n-1})$ ovisno o odnosu susjednih članova iterativnog niza. Uvjet (94) nam daje

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq q^n|x_1 - x_0| \quad (97)$$

S druge je strane red

$$A = x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_{n+1} - x_n) + \dots$$

s $n + 1$ -vim parcijalnim sumama $S_{n+1} = x_n$ apsolutno konvergentan, jer ga možemo majorirati geometrijskim redom preko (97), tj. preko nejednakosti trokuta dobivamo

$$\begin{aligned} |A| &\leq |x_0| + |x_1 - x_0| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| + \cdots \\ &\leq |x_0| + |x_1 - x_0|(1 + q + \cdots + q^n) \leq |x_0| + \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q}, \end{aligned}$$

budući da je po pretpostavci $q \in (0, 1)$. Na taj način je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma \in (a, b).$$

Kako je $\varphi(x)$ neprekidna funkcija (jer potječe od derivabilne funkcije f) ponavljajući argument (93) dobivamo da je γ rješenje, jer je $\gamma = \varphi(\gamma)$. Da je $\gamma \equiv c$ jedinstveno rješenje zaključujemo iz

$$\gamma - c = \varphi(\gamma) - \varphi(c) = (\gamma - c)\varphi'(\eta).$$

Kako je $|\varphi'(\eta)| < 1$, ova jednadžba ima smisla samo ako je $\gamma = c$.
□

Greška metode je:

$$\begin{aligned} |c - x_n| &< \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \\ &< \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \end{aligned} \quad (98)$$

Iz (98) je vidljivo kako povećanje broja iteracija n rezultira kvalitetnom procjenom $c \approx x_n$, ali je konvergencija iteracije brža za što manje q . Da možemo poboljšati brzinu konvergencije iteracije pokazuje sljedeći rezultat.

TEOREM 11. *Neka je $f \in C^1[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$ i rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$. Ako je*

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1 \quad x \in [a, b]$$

tada iterativna procedura

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{M_1} f(x), \quad q = 1 - \frac{m_1}{M_1} \quad (99)$$

konvergira.

DOKAZ. Zamijenimo jednadžbu $f(x) = 0$ ekvivalentnom

$$x = x - \lambda f(x) := \varphi(x). \quad (100)$$

Tražimo parametar λ tako da vrijedi unutar $[a, b]$ da je

$$0 \leq \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq q < 1,$$

odakle je

$$1 \leq 1 - \lambda M_1 \leq 1 - \lambda m_1 \leq q.$$

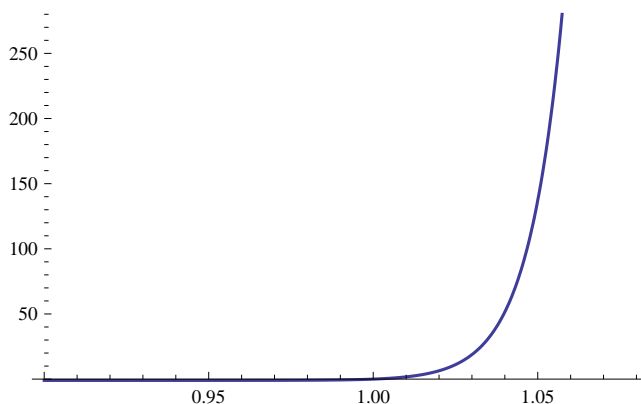
Sada lako biramo $\lambda = 1/M_1$, $q = 1 - m_1/M_1 < 1$. \square

3.5. Općenito o greškama metoda rješavanja jednadžbi. U metodama izračunavanja nultočki jednadžbi oblika $f(x) = 0$ udobno je koristiti bliskost uzastopnih iteracija $|x_n - x_{n-1}|$, naročito ako se ta razlika smanji ispod određene zadane razine točnosti $\epsilon > 0$. No, iako je $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, ne preporučavamo poistovjećivanje $c \approx x_n$, gdje je c traženo rješenje, tj. $f(c) = 0$, iz razloga što se zorno vidi iz sljedećeg primjera.

Neka je $f(x) = x^{1000001} - 1$. Očigledno je $f(1) = 0$. No na slici je vidljivo da niti velika bliskost x_n, x_{n-1} ne garantira malu pogrešku računanja, jer je

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_{n-1})| &= |x_n^{1000001} - x_{n-1}^{1000001}| \\ &= |x_n - x_{n-1}| |x_n^{1000000} + x_n^{999999}x_{n-1} + \\ &\quad \cdots + x_n x_{n-1}^{999999} + x_{n-1}^{1000000}| \\ &\approx 1000001 \cdot |x_n - x_{n-1}|, \end{aligned}$$

jer su x_n, x_{n-1} blizu jedinici. Već malo veći razmak $|x_n - x_{n-1}|$ "biva pojeden" od strane milijunskog koeficijenta, dakle greška je velika.



SLIKA 4. $f(x) = x^{1000001} - 1$

Zato tražimo efikasniju procjenu razlike pravog rješenja c , $f(c) = 0$ i nekog približnog rješenja x_n . U tome nam pomažu sljedeće procjene.

TEOREM 12. *Neka je $f \in C^1[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$ i neka je $c \in (a, b)$ rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. Ako je $x_n \in (a, b)$ tada je*

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|. \quad (101)$$

DOKAZ. Promatramo razliku $|f(x_n)| = |f(x_n) - f(c)|$. Na osnovu Lagrangeovog teorema o diferencijalnoj srednjoj vrijednosti je

$$|f(x_n) - f(c)| = |f'(\eta)||x_n - c| \geq |x_n - c| \cdot \min_{\eta \in [a, b]} |f'(\eta)| = m_1|x_n - c|,$$

odakle već slijedi tvrdnja (101), jer je ili $\eta \in (x_n, c)$ ili $\eta \in (c, x_n)$. \square

TEOREM 13. *U metodi tangente vrijedi*

$$|x_n - c| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|. \quad (102)$$

DOKAZ. Na osnovu Taylorovog razvoja funkcije $f(x)$ u okolini točke $x = x_n$ vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = f(x_{n-1}) \\ &\quad + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned} \quad (103)$$

gdje je $\zeta \in (x_{n-1}, x_n)$ ili $\zeta \in (x_n, x_{n-1})$. Na osnovu iterativne formule (89) metode tangente je

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

što relaciju (103), preko nejednakosti trokuta, prevodi u

$$|f(x_n)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)|}{2} \cdot (x_n - x_{n-1})^2.$$

Primijenimo na potonji izraz rezultat prethodnog teorema (101) i odmah dobivamo tvrdnju (102). \square

PRIMJEDBA 6. *Sada vidimo da uz odredjen uvjet - ograničen modul druge derivacije funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ - bliskost uzastopnih derivacija IPAK znači prestanak računanja daljnjih iteracija. Dakle,*

$$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2m_1\epsilon}{M_2}}$$

povlači da je

$$|x_n - c| \leq \epsilon,$$

što za dovoljno malo ϵ već može biti ispod zadanog praga greške.

TEOREM 14. *Neka je*

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < \infty \quad x \in [a, b].$$

U metodi sekante tada vrijedi

$$|x_n - c| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|. \quad (104)$$

Dokaz vidi u knjizi Demidovich i Maron (str. 125).

PRIMJEDBA 7. *Metode sekante i tangente trebaju i uvjet da niti prva, niti druga derivacija funkcije kojoj tražimo nulište, se ne smije anulirati unutar intervala $[a, b]$. Dakle, obje vrijednosti m_1, m_2 su pozitivne i gornje granice (101), (102) i (104) su dobro definirane.*

3.6. Zadaci.

ZADATAK 3.1. *Metodom polovljenja izračunajte vrijednost $\sqrt{2}$ s točnošću na 3 decimale.*

Broj $\sqrt{2}$ je rješenje jednadžbe $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Kako je $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$, rješenje jednadžbe se nalazi u segmentu $[1, 2]$. Provjerimo:

$$f(1)f(2) = -1 \cdot 2 = -2 < 0.$$

Dakle, prva aproksimacija rješenja je

$$x_0 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Kako je

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4} = 1.25 \neq 0$$

podijelimo segment na pola i dobivamo segmente

$$\left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

Kako je $f(1)f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4} < 0$, nultočka se nalazi u segmentu $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, a za drugu aproksimaciju uzimamo

$$x_1 = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

Kako je

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -0.4375 \neq 0$$

nastavimo postupak sa polovljenjem segmenta. Dobivamo sljedeći niz aproksimacija:

$$\begin{aligned} \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right], & \Rightarrow x_2 = \frac{11}{8}, \quad f\left(\frac{11}{8}\right) = -0.109375 \neq 0 \\ \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2} \right], & \Rightarrow x_3 = \frac{23}{16}, \quad f\left(\frac{23}{16}\right) = 0.0664 \neq 0 \\ \left[\frac{11}{8}, \frac{23}{16} \right], & \Rightarrow x_4 = \frac{45}{32}, \quad f\left(\frac{45}{32}\right) = -0.0225 \neq 0 \\ \left[\frac{45}{23}, \frac{23}{16} \right], & \Rightarrow x_5 = \frac{91}{64}, \quad f\left(\frac{91}{64}\right) = 0.0217 \neq 0 \\ \left[\frac{45}{23}, \frac{91}{64} \right], & \Rightarrow x_6 = \frac{181}{128} \approx 1.414, \quad f\left(\frac{91}{64}\right) = -0.00427 \end{aligned}$$

ZADATAK 3.2. *Metodom sekante odredite realne korijene funkcije $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ na 4 decimale.*

Najprije moramo odrediti koliko realnih korijena imamo. Pronađimo ekstreme funkcije:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

Kako je

$$f''(x) = 6x - 4,$$

uvrštavanjem stacionarnih točaka zaključujemo da je u $x_1 = 0$ maksimum, a u $x_2 = \frac{4}{3}$ minimum. Dakle, grafički: uočavamo da imamo

jednu realnu nultočku. Kako je

$$f(0) < 0, \quad f(1) < 0, \quad f(2) < 0, \quad f(3) > 0,$$

zaključujemo da je nultočka u segmentu $[2, 3]$. Kako je $f(2) < 0$, za nultu aproksimaciju uzimamo $x_0 = a = 2$. Imamo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)} = 2.1111$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} = 2.1639$$

$$x_3 = 2.1875$$

$$x_4 = 2.1978$$

$$x_5 = 2.2022$$

$$x_6 = 2.2041$$

$$x_7 = 2.2049$$

$$x_8 = 2.2053$$

$$x_9 = x_{10} = 2.2055$$

ZADATAK 3.3. *Newtonovom metodom riješite $x = e^{-x}$.*

Sada je $f(x) = x - e^{-x}$. Odredimo segment u kojem se nalazi nultočka.

$$f(-1) < 0, \quad f(0) < 0, \quad f(1) > 0,$$

pa je nultočka iz segmenta $[0, 1]$. $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ na $[0, 1]$, $f''(x) = -e^{-x}$. Kako je

$$f(0)f''(0) = -1 \cdot (-1) > 0$$

za x_0 uzimamo da je $x_0 = 0$. Sada je:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - e^{-x_0}}{1 + e^{-x_0}} = 0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - e^{-x_1}}{1 + e^{-x_1}} = 0.5663$$

$$x_3 = 0.56714$$

$$x_4 = 0.56714$$

Dakle, rješenje je $x = 0.56714$.

ZADATAK 3.4. *Metodom iteracije riješite jednadžbu $x^3 - x + 1 = 0$ s točnošću na 5 decimala.*

Imamo dvije ekvivalentne jednadžbe koje možemo dobiti:

$$\varphi_1(x) := x^3 - 1 = x$$

i

$$\varphi_2(x) := \sqrt[3]{x+1} = x.$$

Lako uočavamo da je nultočka na segmentu $[1, 2]$ (isprobamo!). Sada moramo provjeriti koja od ovih dviju funkcija zadovoljava uvjet da je njena prva derivacija na tom segmentu apsolutno omeđena sa nekim q manjim od 1. Derivacije su:

$$\varphi_1'(x) = 3x^2, \quad \varphi_2'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

Za prvu funkciju je očito da je ona na $[1, 2]$ veća od 1 (neki broj iz segmenta $[1, 2]$ kvadriramo i množimo s 3, a to ne može biti manje od 1), dok za drugu možemo pokazati da na $[1, 2]$ vrijedi:

$$|\varphi_2'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} < \frac{1}{3} < 1.$$

Znači, računamo sa φ_2 . Za nultu aproksimaciju uzimamo bilo koji broj iz segmenta $[1, 2]$, npr. $x_0 = 1.5$.

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = 1.3572$$

$$x_2 = \varphi_2(1, 3572) = 1.33086$$

$$x_3 = 1.32588$$

$$x_4 = 1.32494$$

$$x_5 = 1.32476$$

$$x_6 = 1.32473$$

$$x_7 = 1.32472$$

$$x_8 = 1.32472$$

Dakle, rješenje je $x = 1.32472$.

ZADATAK 3.5. *Metodom iteracije odredite negativan korijen jednadžbe $e^x - x^2 + 1 = 0$ s točnošću na 5 decimala.*

Rješenje: -1.14776

ZADATAK 3.6. *Naći oba rješenja jednadžbe $x^2 - 2x + \arctan x = 0$. Prvo rješenje pronaći metodom tangente, a drugo metodom iteracije, na dvije decimale.*

Rješenje: $x_1 = 0, x_2 = 1.295$

ZADATAK 3.7. *Riješite jednadžbu $2^x = 8x$, na dvije decimale točno, metodom sekante.*

Rješenje: 5.44

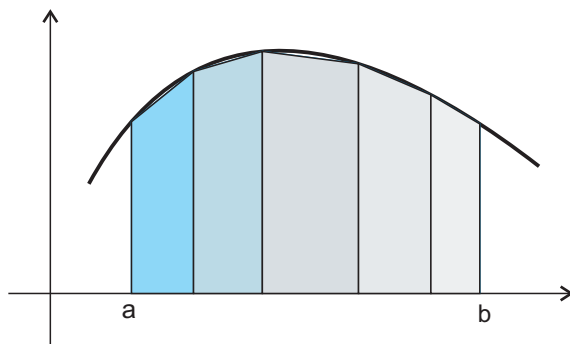
4. Numeričko integriranje

Ako je $F'(x) = f(x)$ onda je:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

U mnogim slučajevima primitivna funkcija se ne može naći pa izračunavanje po gornjoj formuli može biti teško ili nemoguće. Zbog toga su se pojavile metode za približno izračunavanje određenog integrala.

4.1. Trapezna formula. Svakako je najpoznatija formula numeričke integracije trapezna formula kod koje se podintegralna funkcija zamjenjuje po dijelovima linearnom funkcijom, pa tako elementi površine imaju oblik trapeza.



SLIKA 5. Trapezna formula

Ako je f neprekidna funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$, tad postoji barem jedna točka $\xi \in [a, b]$ za koju je

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi).$$

Kad bismo znali odrediti točku ξ , problem integracije funkcije f bio bi vrlo jednostavan. To, dakako, općenito nije moguće učiniti.

Podijelimo interval $[a, b]$ na n dijelova, točkama $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Na svakom od njih odaberimo $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Tako ćemo dobiti približnu formulu za računanje integrala:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Podintervale možemo odabrati tako da imaju jednaku duljinu. Neka je $h = (b - a)/n$ i $x_i - x_{i-1} = h$ za svaki i . Onda dobivamo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h[f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)].$$

Ako je f integrabilna, onda osnovni teorem integralnog računa govori da će se smanjivanjem duljine h_n suma s desne strane približavati stvarnoj vrijednosti integrala. Kad bismo znali dobro odabrati brojeve ξ_i (npr. one iz teorema srednje vrijednosti za svaki od podintervala $[x_{i-1}, x_i]$), tad bi suma s desne strane dala točnu vrijednost integrala. Na žalost, općenito ne postoji algoritam za određivanje takvih brojeva ξ_i (niti ga se može pronaći). Zato se opredjeljujemo da unaprijed odredimo te brojeve, na jedan od sljedećih načina:

1. Stavimo li $\xi = x_{i-1}$, time biramo lijevi kraj intervala i dobivamo tzv. lijevu sumu koju ćemo označiti s L_n :

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n := h[y_0 + \dots + y_{n-1}].$$

2. Odaberemo li $\xi_i = x_i$, time biramo desni kraj intervala i dobivamo tzv. desnu sumu koju ćemo označiti s D_n :

$$\int_a^b f(x)dx \approx D_n := h[y_1 + \dots + y_n].$$

Koja je od ovih formula bolja? O tome ne možemo općenito ništa reći. Možemo zato pokušati uzeti njihovu aritmetičku sredinu!

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}(L_n + D_n) = \frac{h}{2}[(y_0 + \dots + y_{n-1}) + (y_1 + \dots + y_n)] \\ &= \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + \dots + y_{n-1})]. \end{aligned}$$

Dakle, trapezna formula glasi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})],$$

gdje je $h = x_n - x_{n-1}$.

Formulu za grešku dobivamo na sljedeći način: Neka podintegralna funkcija ima na segmentu $[a, b]$ neprekidnu drugu derivaciju. Greška

trapezne formule na i -tom segmentu jednaka je

$$\begin{aligned} R_i(h) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+h} f(x)dx - \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_{i-1} + h)). \end{aligned}$$

Deriviramo $R_i(h)$ po h dva puta i dobivamo:

$$\begin{aligned} R'_i(h) &= \frac{1}{2}(f(x_{i-1} + h) - f(x_{i-1})) - \frac{h}{2}f'(x_{i-1} + h) \\ R''_i(h) &= -\frac{h}{2}f''(x_{i-1} + h). \end{aligned}$$

Kako je $R_i(0) = R'_i(0) = 0$ i koristeći pravila integriranja, imamo:

$$R'_i(h) = R'_i(0) + \int_0^h R''_i(t)dt = \frac{-1}{2} \int_0^h tf''(a+t)dt.$$

Zbog neprekidnosti druge derivacije funkcije f postoji točka ξ takva da je $x_{i-1} + \xi \in [x_{i-1}, x_{i-1} + h]$ i da vrijedi:

$$R'_i(h) = -f''(\xi) \int_0^h \frac{t}{2}dt = -f''(\xi) \frac{h^2}{4}.$$

To isto napravimo za funkciju $R(h)$ pa dobijemo:

$$R_i(h) = R_i(0) + \int_0^h R'_i(t)dt = -\frac{1}{4} \int_0^h f''(\xi)t^2dt = -\frac{1}{12}h^3f''(\xi). \quad (105)$$

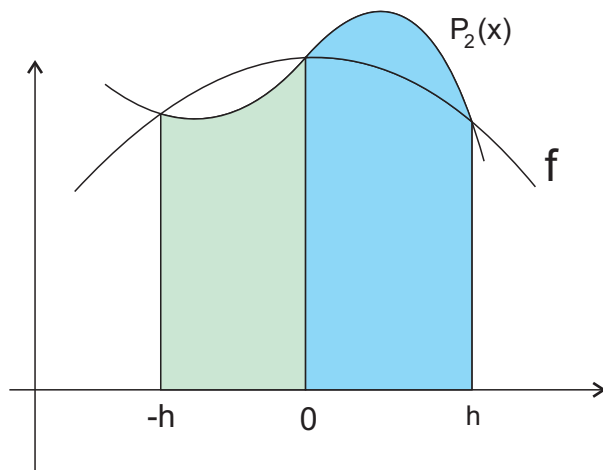
Primijenjujući formulu (105) na svaki podsegment $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ dobijemo n grešaka gornjeg oblika. Budući da je funkcija f'' neprekidna na segmentu $[a, b]$, postoji $M > 0$ takav da je $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Tada, za grešku R na cijelom segmentu $[a, b]$ vrijedi:

$$|R(h)| \leq \sum_{i=1}^n |R_i(h)|$$

tj. greška metode je:

$$|R(h)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

4.2. Simpsonova formula. Kad računamo trapeznom formulom, graf funkcije zamjenjujemo odsječcima pravca. Pokušamo li zamijeniti graf funkcije ne dijelovima pravca već parabole, očekujemo da ćemo dobiti precizniju formulu. Neka su zadane vrijednosti funkcije y_0, y_2 na krajevima intervala duljine $2h$, te y_1 u sredini tog intervala. Kolika je površina ispod luka parabole koja prolazi tim točkama?



SLIKA 6. Simpsonova formula

Možemo pretpostaviti da se radi o intervalu $[-h, h]$, jer izbor intervala ne mijenja iznos površine.

Interpolacijski polinom drugog stupnja $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ čiji graf prolazi točkama $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) možemo odrediti i elementarnim računom:

$$ah^2 - bh + c = y_0,$$

$$c = y_1,$$

$$ah^2 + bh + c = y_2.$$

Oдавde slijedi

$$a = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2),$$

$$b = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0),$$

$$c = y_1$$

pa je tražena jednadžba

$$f(x) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)x + y_1.$$

Površina ispod grafa ove funkcije je:

$$\int_{-h}^h f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Podijelimo sad interval $[a, b]$ na $2n$ dijelova. Stavimo $h = (b - a)/(2n)$. Na svaka susjedna dva dijela zamijenimo integral ovom formulom. Dobit ćemo Simpsonovu formulu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})],$$

gdje je $h = x_n - x_{n-1}$. Greška metode je:

$$|R| \leq \frac{(b-a)h^4}{180}M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

4.3. Zadaci.

ZADATAK 4.1. Neka je funkcija $f(x)$ zadana tablicom

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	1.0000	0.9950	0.9801	0.9553	0.9553	0.9211	0.8253	0.7648	0.6967

Izračunati

$$\int_0^{0.8} f(x)dx$$

koristeći:

- Trapeznu formulu
- Simpsonovu formulu

a) Zapišimo tablicu na sljedeći način:

x	y_0, y_n	y_k
0	1.0000	
0.1		0.9950
0.2		0.9801
0.3		0.9553
0.4		0.9553
0.5		0.9211
0.6		0.8253
0.7		0.7684
0.8	0.6967	
Σ	1.6967	6.4005

i pažljivo uvrstimo u formulu:

$$\int_0^{0.8} f(x)dx \approx \frac{0.1}{2}(1.6967 + 2 \cdot 6.4005) = 0.724885.$$

b) Zapišimo tablicu na sljedeći način:

x	y_0, y_n	y_{2k-1}	y_{2k-2}
0	1.0000		
0.1		0.9950	
0.2			0.9801
0.3		0.9553	
0.4			0.9553
0.5		0.9211	
0.6			0.8253
0.7		0.7684	
0.8	0.6967		
Σ	1.6967	3.6398	2.7607

i pažljivo uvrstimo u formulu:

$$\int_0^{0.8} f(x)dx \approx \frac{0.1}{3}(1.6967 + 2 \cdot 2.7607 + 4 \cdot 3.6398) = 0.72591.$$

Bibliografija

- [1] B.P. Demidovich, I.A. Maron, *Computational Mathematics*, MIR Publishers, Moscow, 1987.
- [2] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika. Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb, 2007.
- [3] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika. Slučajne varijable*, Element, Zagreb, 2007.
- [4] V. Jevremović, *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd, 2009.
- [5] M. Jovanović, M. Merkle, Z. Mitrović, *Vjerovatnoća i statistika. Zbirka riješenih zadataka*, Elektrotehnički fakultet, Banja Luka, 2006.
- [6] Kopchenova, N.V., Maron, I.A., *Computational mathematics*, MIR Publishers, Moscow, 1984.
- [7] G.V. Milovanović, M.A. Kovačević, *Zbirka rešenih zadataka iz numeričke analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
- [8] Pogány, T. *Primijenjena matematika: metodička zbirka riješenih ispitnih zadataka*, Fakultet za pomorstvo i saobraćaj, Rijeka, 1992.
- [9] Pogány, T. *Teorija vjerojatnosti. Zbirka rješenih ispitnih zadataka*, Sveučilište u Rijeci, Odjel za pomorstvo, Rijeka, 1999.
- [10] Vranjković, P., *Zbirka zadataka iz vjerojatnosti i statistike s uputama i rješenjima*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.