

Fizika - pomorski fakultet

ZK

5.3.2011 15:46:19

Sadržaj

1	Uvod	4
1.1	Podjela i kratka povijest fizičkih područja	4
1.2	jedinice	4
1.2.1	Duljina	4
1.2.2	masa	5
1.2.3	Vrijeme	5
1.2.4	Prefiksi mjernim jedinicama	5
1.3	Nivoi organizacije materije	5
1.4	Dimenzijske oznake	5
1.5	Značajne znamenke	5
I	Mehanika	7
2	Kinematika	7
2.1	Brzina	7
2.1.1	Mehaničko gibanje	7
2.1.2	Sustavi referencije	7
2.1.3	Pravocrtno gibanje	7
2.1.4	Jednoliko gibanje	7
2.2	Nejednoliko gibanje	8
2.3	Srednja brzina	8
2.3.1	Trenutna brzina nejednolikog gibanja	9
2.4	Inercija	9
2.4.1	Princip inercije	9
2.4.2	Inercijalni referentni sustavi	10
2.4.3	Princip relativnosti	10
2.4.4	Galilejeve transformacije	11
2.4.5	Klasični zakon slaganja brzina	11
3	Akceleracija	12
3.1	Srednja i trenutna akceleracija	12
3.1.1	Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje	12
3.1.2	Graf ($v - t$) jednoliko ubrzanog gibanja	12
3.2	Grafičko računanje udaljenosti	13
3.2.1	Put i srednja brzina pri jednoliko ubrzanom gibanju	13
3.2.2	Kružno gibanje čestice	13
3.2.3	Jednoliko kružno gibanje čestice	14
3.2.4	Ubrzanje pri jednolikom kružnom gibanju	15
3.3	Sila	15
3.3.1	Sila, mjera međudjelovanja tijela	15
3.3.2	Elastična i plastična deformacija	16
3.3.3	Sila je vektor	16
3.4	Težina i masa	16
3.4.1	Gravitacijska sila. Težina	16
3.4.2	Slobodni pad	16
3.4.3	Masa tijela	17
3.5	Osnovni zakoni dinamike	17
3.5.1	Sila i akceleracija	17
3.5.2	Primjena osnovnog zakona dinamike	18
3.5.3	Beztežinsko stanje	20

3.6	Jednadžbe gibanja i početni uvjeti	20
3.6.1	Gibanje čestice pod utjecajem gravitacijske sile - kosi hitac.	20
3.6.2	Numeričko rješavanje osnovnog problema dinamike	21
3.6.3	Gibanje harmonijskog oscilatora	21
3.7	Gravitacija	22
3.7.1	Otkriće zakona gravitacije	22
3.7.2	Newtonov zakon univerzalne gravitacije	23
3.7.3	Cavendishev eksperiment	23
3.7.4	Određivanje udaljenosti od Sunca do planeta	23
3.7.5	Gravitacijsko polje	24
3.7.6	Intenzitet gravitacijskog polja	24
3.7.7	Zemljino gravitacijsko polje	24
3.7.8	Efekt zemljine rotacije na akceleraciju slobodnog pada	24
3.7.9	Gibanje planeta[3]	25
3.8	Zakon očuvanja impulsa	25
3.8.1	Zatvoreni sustav	25
3.8.2	Zakon očuvanja impulsa	26
3.8.3	Centar mase	26
3.8.4	Gibanje centra masa	27
3.9	Energija	27
3.9.1	Kinetička energija	27
3.9.2	Kinetička energija i rad	27
3.9.3	Snaga	28
3.9.4	Jedinice za energiju, rad i snagu	28
3.10	Konzervativne sile i potencijalna energija	29
3.10.1	Rad elastične sile	29
3.10.2	Konzervativne sile	30
3.11	Potencijalna energija	30
3.12	Zakon očuvanja energije u Newtonovoj mehanici	31
3.12.1	Mehanička energija i njeno očuvanje	31
3.12.2	Prva kosmička brzina	31
4	Teorija specijalne relativnosti	32
4.1	Brzina svjetlosti i zakon slaganja brzina	32
4.2	Michelson-Morleyev eksperiment	32
4.3	Postulati specijalne teorije relativnosti	33
4.4	Lorentzove transformacije	33
4.5	Posljedice Lorentzovih transformacija	34
4.5.1	Dilatacija vremena	34
4.5.2	Paradoks blizanaca	35
4.5.3	Kontrakcija dužina	35
4.5.4	Vremenski interval između uzroka i posljedice	35
4.5.5	Slaganje brzina	36
4.6	Relacija između relativističke i Newtonove mehanike	36
4.6.1	Massa, impuls i sila u teoriji relativnosti	37
4.6.2	Relativistička masa	37
4.6.3	Relativistička energija	37

1 Uvod

Fizika (od grčke riječi *φύσις*, priroda i *φυσικη*, poznavanje prirode) je znanost koja proučava osnovne zakonitosti u svemiru. Današnja fizika nadovezuje se na znanost koja se nekad nazivala prirodna filozofija i iz koje je nastala većina današnjih znanstvenih grana, poput kemije, biologije, astronomije ili geologije. Temeljna znanja fizike ugrađena su u sve prirodne i tehničke znanosti i zbog toga se nekoliko kolegija iz osnova fizike sluša na studijskim programima iz svih tih područja. Osim toga, temeljna znanja i pojmovi iz fizike dio su opće kulture kojima bi trebala baratati svaka akademski obrazovana osoba, poglavito kada se radi o obrazovanju iz prirodnih i tehničkih znanosti. Ljepota i snaga fizike leži u jednostavnosti osnovnih fizikalnih teorija i načinu na koji već mali broj osnovnih pojmova, jednadžbi ili pretpostavki može promijeniti i proširiti sliku o svijetu koji nas okružuje.

Fizika je danas vodeća prirodna znanost. Razlog je prvenstveno u bogatstvu i raznolikosti ideja i metoda istraživanja u modernoj fizici, kao i u fundamentalnom značenju tih ideja i tehnika u epistemologiji (teoriji znanosti). Ne manje važan je utjecaj fizike na razvoj produktivnih sila društva[1].

Glavni predmet fizike zasniva se na eksperimentalnom opažanju i kvantitativnom mjerenju.¹

Cilj fizike je naći ograničeni broj osnovnih zakona (postulata) koji upravljaju prirodnim pojavama, upotrijebiti ih za razvoj teorija koje predviđaju rezultate budućih pokusa. Most između teorije i eksperimenta je matematika.

Neslaganje između teorije i eksperimenta traži potragu za novim teorijama. Teorije su zadovoljavajuće samo u nekim granicama, pod nekim uvjetima.

1.1 Podjela i kratka povijest fizičkih područja

(Newtonova) Mehanika - od Newtona (1667.) pa do kraja 18. stoljeća. This is an appropriate place to begin an introductory text because many of the basic principles used to understand mechanical systems can later be used to describe such natural phenomena as waves and the transfer of energy by heat. Furthermore, the laws of conservation of energy and momentum introduced in mechanics retain their importance in the fundamental theories of other areas of physics.

termodinamika, elektromagnetizam - u 19. stoljeću

moderna fizika - teorija relativnosti (specijalna, opća), quantna fizika, kaos (20. st)

1.2 jedinice

1960. SI (Système International): m, kg, s

K, A, cd(kandela-svjetlosni intenzitet), mol (količina tvari)

1.2.1 Duljina

- 1120. Engleski kralj odredio standardnu duljinu: 1 yard=od vrha nosa do kraja ispružene ruke
- Luis XIV - stopa
- 1799. U Francuskoj - $1m = 1/10^7$ d(sjeverni pol, ekvator)
- 1960. Pt-Ir šipka

$$1m = 1650763.73\lambda$$

λ je valna duljina narančaste svjetlosti emitirane s Cr⁸⁶ lampe

- 1983. $1m = 1/299792558c \cdot s$

¹The need for assigning numerical values to various measured physical quantities was expressed by Lord Kelvin (William Thomson) as follows: I often say that when you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you should know something about it, but when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meager and unsatisfactory kind. It may be the beginning of knowledge but you have scarcely in your thoughts advanced to the state of science.

Tablica 1: Prefiksi za mjerne jedinice

veličina	naziv	oznaka
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

1.2.2 masa

1 kg – 1887. godine

1.2.3 Vrijeme

Prije 1960. $1s = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{24}$ srednjeg sunčanog dana
 1967. $1s = 9192631770$ perioda zračenja iz Cz atoma

1.2.4 Prefiksi mjernim jedinicama

1.3 Nivoi organizacije materije

materijal, atomi, (jezgra, elektroni), elementarne čestice, kvarkovi

1897. J.J. Thomson otkrio elektron

1911. jezgra atoma

1.4 Dimenzijske oznake

$[]$ — dimenzija fizikalne veličine

pr:

$$[v] = m/s = \frac{[l]}{[t]}$$

1.5 Značajne znamenke

Npr. ako je duljina $5.5cm$, to znači da je $(5.5 \pm 0.1)cm$ odnosno da je između 5.4 cm i 5.6 cm. Ovdje su dvije značajne znamenke.

Pravilo za množenje: broj značajnih znamenki u rezultatu je broj značajnih znamenki u veličini s najnižim brojem značajnih znamenki

$$(5.5cm) \cdot (6.4cm) = 35.2cm^2 \rightarrow 35$$

Provjera:

$$(5.4cm) \cdot (6.3cm) = 34.02cm^2$$

$$(5.6\text{cm}) \cdot (6.5\text{cm}) = 36.40\text{cm}^2$$

Pravilo za (+,-): broj decimalnih mjesta, a ne značajnih znamenki.
pr.

$$123 + 5.35 = 128 \neq 128.35$$

Dio I

Mehanika

2 Kinematika

2.1 Brzina

2.1.1 Mehaničko gibanje

Sva tijela koja nas okružuju su u stanju stalnog gibanja. Najjednostavniji oblik gibanja je pomicanje jednog tijela u odnosu na drugo. To nazivamo *mehaničko gibanje*.

Jedna vrsta takvog gibanja je *translatorno gibanje*. Pri tom gibanju sve točke tijela putuju na jednaki način, tj. ravna linija koja povezuje bilo koje dvije točke se pomiče paralelno sebi (*paralelni pomak*).

Druga jednostavna vrsta gibanja je *rotacijsko gibanje* pri kojem točke tijela opisuju kružnice u paralelnim ravninama. Centri svih kružnica leže na jednoj liniji koju zovemo *os rotacije*.

Materijalna točka je tijelo čije se dimenzije mogu zanemariti za dani problem. Naravno, taj je koncept apstrakcija.

2.1.2 Sustavi referencije

Kad se bavimo fenomenima blizu površine Zemlje, vidimo da svi smjerovi u prostoru nisu ravnopravni (ekvivalentni). Tijelo ispušteno iz ruke uvijek pada vertikalno. Razlog tom odsustvu ravnopravnosti različitih smjerova je što Zemlja privlači ostala tijela. U prostoru daleko od velikih tijela možemo zapaziti da su svi smjerovi ravnopravni. Kažemo da je *slobodni prostor izotropan*, tj. nema smjera koji posjeduje specijalna svojstva.

Isto tako sve točke u prostoru su ravnopravne ako u blizini nema velikih tijela, pa kažemo da je *slobodni prostor homogen – jednolik*, tj. nijedna točka ne posjeduje specijalne osobine.

Vrijeme je također homogeno. To znači da se svaki događaj, pod istim uvjetima ali u različitim vremenima događa na točno isti način. Npr. kapljica s određene visine pada u istom laboratoriju isto vrijeme danas kao i jučer, a i nakon 1000 godina.

Kako je prostor homogen (sve su točke ravnopravne) i izotropan (svi su smjerovi ravnopravni), nemoguće je odrediti apsolutni položaj čestice u odnosu na prostor. Ali, moguće je odrediti položaj jednog tijela u odnosu na drugo.

Referentni sustav je tijelo ili grupa tijela za koje smatramo da je fiksno za dani problem i u odnosu na koje određujemo poziciju ostalih tijela.

Referentnom sustavu se obično pridružuju tri međusobno okomite ravne linije, *koordinatne osi*. Položaj pojedine točke određen je s tri *koordinate*.

Linija koja opisuje gibanje čestice u danom sustavu naziva se *putanja, staza, trajektorija*.

Oblik putanje ovisi o izabranom referentnom sustavu. Razmotrimo tijelo pušteno da slobodno pada u vlaku koji se giba u odnosu na Zemlju. U odnosu na vlak, putanja je pravac; prema zemlji, to je krivulja (parabola ako nema otpora zraka). Sličan je primjer točka na propeleru aviona koji leti. U sustavu vezanom na avion točka opisuje kružnicu, a u onom vezanom za Zemlju putanja je zavojnica.

2.1.3 Pravocrtno gibanje

Razmotrimo česticu koja putuje pravocrtno u određenom koordinatnom sustavu. Možemo odabrati takav koordinatni sustav da je jedna os, npr., x -os, u smjeru putanje čestice. tad će u svakom trenutku čestica imati potpuno određenu koordinatu. To znači da je koordinata čestice funkcija vremena: $x = f(t)$. Oblik ove funkcije je *jednadžba gibanja* dane čestice.

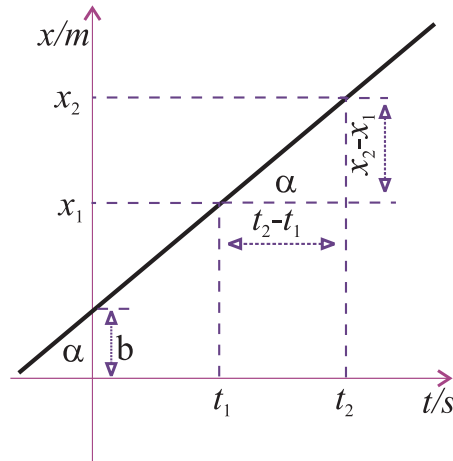
2.1.4 Jednoliko gibanje

Gibanje čestice je *jednoliko* ako je njena koordinata linearna funkcija vremena:

$$x = vt + b \tag{2.1}$$

gdje su v i b određene konstante.

Svako gibanje koje nije jednoliko gibanje zovemo *nejednolikim ili varijabilnim* gibanjem.



Slika 1: $x - t$ graf jednolikog gibanja po pravcu po formuli (2.1).

Uvrstimo li $t = 0$ u jednadžbu gibanja dobivamo $x_0 = b$. To je *početni položaj*, tj. udaljenost čestice od ishodišta u početnom trenutku. Početni trenutak ne znači početak gibanja, već trenutak u kom smo počeli mjeriti, tj. kad smo uključili zapornu uru.

Početak gibanja nas često ne zanima. Npr. gibanje meteorita promatramo od ulaska u atmosferu, i to je početni trenutak, a ne početak gibanja meteorita.

2.2 Nejednoliko gibanje

Zapazite bitnu razliku između grafa gibanja i putanje. Putanja je krivulja duž koje se čestica giba u referentnom sustavu; graf krivulje su točke u prostoru koordinate-vrijeme, za jednodimenzionalno gibanje ($x-t$).

2.3 Srednja brzina

Udaljenost $\Delta x = x_2 - x_1$ naziva se *pomak* čestice u vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$.

Zapazite da ako se čestica giba uvijek u istom smjeru, udaljenost koju prijeđe jednaka je veličini pomaka: $\Delta s = |\Delta x|$. Ako se giba prvo u jednom smjeru pa stane pa se nastavi gibati u suprotnom smjeru, udaljenost koju prođe jednaka je sumi veličina pomaka u oba smjera: $\Delta s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots$.

Srednja brzina gibanja u danom vremenskom intervalu je fizička veličina numerički jednaka omjeru pomaka i tog vremenskog intervala

$$\bar{v} \equiv v_{\text{srednja}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.2)$$

Srednja brzina je vektor. Njen smjer je smjer pomaka.

Jedinica mjerenja brzine je

$$[v] = \frac{[x]}{[t]}. \quad (2.3)$$

Uglate zagrade ukazuju da se barata s dimenzijama danih veličina.

U *Internacionanom Sustavu Jedinica* (skraćenica je *SI* od francuskog: *Système International d'Unites*) jedinica za put je metar (m) za vrijeme sekunda (s), pa je jedinica za brzinu m/s.

Neke ne *SI* jedinice koje se također upotrebljavaju su

$$1 \text{ cm/s}, \quad 1 \text{ km/h}, \quad 1 \text{ čvor} = 1 \text{ nautička milja po satu} = 1852 \text{ m}/3600 \text{ s} = 0.514 \text{ m/s}.$$

Kod nejednolikog gibanja srednja brzina ovisi o izboru vremenskog intervala. *Srednja brzina ima konstantnu vrijednost*, neovisnu o izabranom vremenskom intervalu, *samo za jednoliko gibanja*. Tada je $x_1 = vt_1 + b$, $x_2 = vt_2 + b$ pa je srednja brzina

$$v_{\text{srednja}} = \bar{v} = v.$$

2.3.1 Trenutna brzina nejednolikog gibanja

Ponekad bismo željeli znati brzinu u *danom trenutku*, ili *trenutnu brzinu*. Ona se može odrediti na sljedeći način. Neka je koordinata čestice u trenutku t jednaka x . U trenutku $t_1 = t + \Delta t$ koordinata će biti $x_1 = x + \Delta x$, gdje je Δx put koji je prešla čestica za vrijeme Δt (pomak čestice). Tada je srednja brzina

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

Općenito što je duži interval Δt , srednja se brzina više razlikuje od trenutne brzine. Suprotno, kraći vremenski interval dat će srednju brzinu koja se manje razlikuje od trenutne brzine koju želimo naći. Sad definiramo *trenutnu brzinu* v kao graničnu vrijednost srednje brzine za infinitezimalno mali vremenski interval:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}. \quad (2.5)$$

Ova se granična vrijednost zove *derivacijom koordinate po vremenu*.

Zamijevamo da je kod *jednolikog gibanja brzina čestice konstantna*. Tako se jednoliko gibanje može iskazati i kao *gibanje konstantom brzinom*. Dakle, u jednadžbi jednolikog gibanja po pravcu $x = vt + b$ je v brzina gibanja, a konstanta b je početna koordinata.

Iz grafa je vidljivo da za jednoliko gibanje vrijedi

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = k \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

gdje je k dimenzijski faktor, a α kut tangente prema vremenskoj osi. Gibanje većom brzinom odgovara većem nagibu pravca.

2.4 Inercija

2.4.1 Princip inercije

U mehanici nužno je naći uvjete pod kojima se tijelo giba pravocrtno ili po krivulji, jednoliko ili nejednoliko, ubrzano ili usporeno.

Aristotel je mislio, pogrešno, da se tijelo giba zbog međudjelovanja s ostalim tijelima. Jedan od razloga tog pogrešnog mišljenja bio je vjerovanje da je Zemlja apsolutno fiksni centar svemira. Iz toga je zaključio da je prirodno stanje za tijelo da miruje u odnosu na Zemlju. Naravno, došao je u teškoće pri objašnjavanju gibanja bačenog kamena ili strelice, kad nema tijela koje gura kamen kroz zrak.

Krajem 16. stoljeća dva su problema ponovo ponukala pitanje gibanja. Prvo, razvoj artiljerije trebao je zakone gibanja granate. I s heliocentričnom teorijom Suncevog sustava, koju je pretpostavio **Nukola Kopernik** (1473.–1543.), postaje jasno da Zemlja nije u centru svemira nego samo jedan od planeta koje se gibaju same od sebe, jer je bilo nevjerovatno da Zemlju i ostale planete nešto stalno gura tisućam godina.

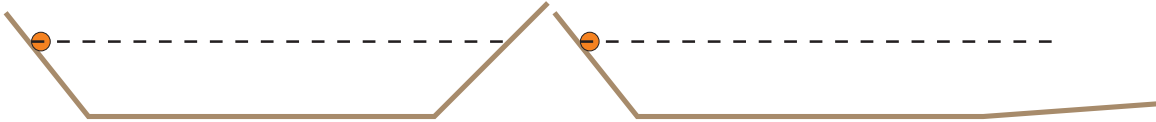
Štoviše, trebalo je objasniti zašto ne opažamo okretanje Zemlje, i zašto kad skočimo gore, napuštajući Zemljinu površinu, spustimo se opet u istu točku.

Prvo ispravno, iako nekompletno, rješenje problema gibanja dao je **Galileo Galilei** (1564.–1642.) početkom 17. stoljeća. Prošlo je 50 godina prije nego je Sir **Isaak Newton** (1643.–1727.) jasno formulirao tri osnovna zakona gibanja koja su postala osnova klasične mehanike.

Za jasno rješenje problema gibanja prvo je trebalo postaviti pitanje: što će se desiti tijelu koje prestane međudjelovati s ostalim tijelima? *Misaoni eksperiment* kojeg je postavio Galilej ide nekako ovako. Na pijesku kuglica ubrzo uspori i stane. Na staklu ide bitno dalje. Što ako je staklo apsolutno glatko? Evidentno, kuglica neće stati i gibat će se beskonačno dugo. **ZK:**

Ja sam cuo: ako imamo dvostruku kosinu, slika ???. Ako trenje nije veliko, kuglica će se popeti na drugu kosinu do iste visine s koje je puštena. Ako smanjujemo kut druge kosine, putovat će dalje. Ako s druge strane nema kosine, nego je ravno, putovat će u beskonačnost.

Ovakav je eksperiment omogućio Galileju da iskaže ideju inercijalnog gibanja tijela. Iako je napravio pogrešku



Slika 2: Galilejev misaoni eksperiment za zakon inercije: kuglica će se podignuti na desnom kraju do iste visine kao kad je krenula (ako trenje zanemarimo). Ako se desni kraj ne uzdiže do te visine, ići će u beskonačnost.

i mislio da će se tijelo zbog inercije gibati ne samo jednoliko pravocrtno već i jednoliko po kružnici, njegova ideja omogućila je Newtonu da ispravno formuliра *zakon inercije*:

Ako tijelo ne interagira s okolnim tijelima, njegova brzina gibanja se ne mijenja kako po veličini tako ni po smjeru, tj. ono se nastavlja gibati jednoliko po pravcu.

To je poznato kao *Newtonov prvi zakon gibanja*.

Gibanje po inerciji je također gibanje duž najkraće staze (udaljenosti) jer je najkraća udaljenost između dvije točke ravna linija.

Ako kažemo da tijelo miruje, ne mislimo da tijelo apsolutno miruje, nego samo u odnosu na neki referentni sustav.

2.4.2 Inercijalni referentni sustavi

Iskaza zakona inercije u prethodnom dijelu je nekompletno. Ne spominje se referentni sustav u kojem se gibanje odvija. Već smo vidjeli da putanja u jednom sustavu može biti pravac, a u drugom parabola. Korektniji zakon inercije glasi:

Postoji sustav referencije u odnosu na koji sva tijela koja ne interagiraju s drugim tijelima se gibaju jednoliko pravocrtno.

Takav se sustav referencije naziva *inercijalnim sustavom*.

Ovakav je sustav apstrakcija i može se naći u prirodi samo aproksimativno.

2.4.3 Princip relativnosti

Postoji beskonačni broj inercijalnih sustava referencije s određenim stupnjem aproksimacije. *Svi sustavi referencije koji se gibaju jednoliko po pravcu u odnosu na određeni inercijalni sustav referencije također su inercijalni.*

Ako se tijelo giba jednoliko u određenom referentnom sustavu, u drugom koji se prema njemu giba jednoliko po pravcu, tijelo će se gibati drugom brzinom, ali opet jednoliko po pravcu. Dakle, drugi sustav je inercijalan istog stupnja kao i prvi.

Promotrimo li gibanje na brodu koji se giba jednoliko po pravcu, i druge sustave, dolazimo do zaključka da ne postoji mehanički eksperiment koji će izdvojiti jedan preferirani referentni sustav od ostalih. Iz toga slijedi da ne možemo postaviti pitanje o *apsolutno mirnom* tijelu, nego samo njegovom relativnom gibanju u odnosu na neki inercijalni referentni sustav.

Taj je osnovni zakon prirode nazvan *Galileov princip relativnosti*:

Zakoni mehanike jednako su valjani u svim inercijalnim sustavima;

ili

Svi inercijalni sustavi su jednakovaljani - ravnopravni.

To je omogućilo **Einsteinu** da formuliра *Einsteinov princip relativnosti*:

Svi zakoni prirode su isti u svim inercijalnim sustavima.

2.4.4 Galilejeve transformacije

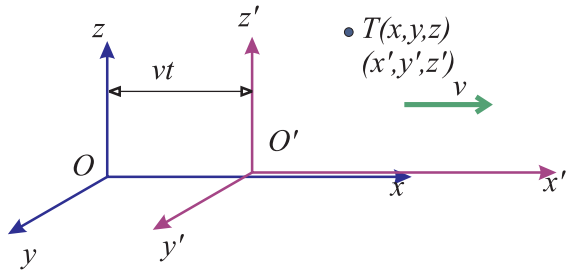
Ako su koordinate određene čestice određene u jednom inercijalnom koordinatnom sustavu, možemo ih izračunati u drugom koji se u odnosu na prvi giba jednolikom brzinom po pravcu.

Neka se sustav S' u odnosu na sustav S giba brzinom v , slika 3. Neka su apscise referentnih sustava u smjeru brzine v , tj. koordinatni sustav (S') giba se u odnosu na prvi (S) brzinom v u smjeru osi x . Jasno je da će se ordinata i aplikata u dva sustava podudarati:

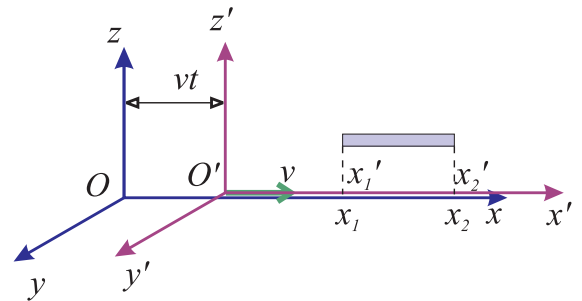
$$y' = y, \quad z' = z.$$

Apscise će se razlikovati za duljinu $OO' = vt$. Dakle Galilejeve transformacije su

$$z' = z, \quad y' = y, \quad x' = x - vt. \quad (2.6)$$



Slika 3: Galilejeve transformacije. Sustav S' se u odnosu na S giba brzinom v u smjeru zajedničke apscise



Slika 4: Duljina pri Galilejevima transformacijama se ne mijenja.

Vrijedi princip relativnosti za Galilejeve transformacije. Naime, sustav S se u odnosu na S' giba brzinom $V = -v$ pa su Galilejeve transformacije

$$z = z', \quad y = y', \quad x = x' + vt. \quad (2.7)$$

Vidimo da su Galilejeve transformacije recipročne: za bilo koji koordinatni sustav može se uzeti da je mirni.

Put čestice razlikuje se u različitim inercijalnim sustavima. Neka u t_1 čestica ima koordinatu x_1 , a u t_2 x_2 . Tada je u sustavu S put

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Put u S' je

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) = \Delta x - v\Delta t \text{ i } \Delta x = \Delta x' + v\Delta t. \quad (2.8)$$

Ali udaljenosti u oba koordinatna sustava ostaju jednake, slika 4. Bilo koja udaljenost ili duljina jednaka je razlici koordinata kad se početak i kraj mjere istovremeno. Tada je

$$l = x_2 - x_1 \text{ u } t_2 = t_1, \text{ tj. } \Delta t = 0 \rightarrow l' = l.$$

2.4.5 Klasični zakon slaganja brzina

Pretpostavimo da čestica putuje jednoliko duž apscise brzinom $u = \Delta x / \Delta t$. Brzina u istoj točki u drugom inercijalnom sustavu je $u' = \Delta x' / \Delta t$. Podijelimo jednadžbu (2.8) s Δt pa imamo

$$u' = u - v \rightarrow u = u' + v. \quad (2.9)$$

To je klasični zakon slaganja brzina za promatrani specijalni slučaj.

3 Akceleracija

3.1 Srednja i trenutna akceleracija

Srednja akceleracija:

$$\langle \vec{a} \rangle = \vec{a}_{sr} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Trenutna akceleracija je granična vrijednost srednje akceleracije kad vremenski interval postaje beskonačno (infinitesimalno) mali:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Dimenzija akceleracije je

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = m/s^2. \quad (3.3)$$

Ukoliko se brzina po veličini kontinuirano povećava ($a > 0$), gibanje je ubrzano, a ako se stalno smanjuje ($a < 0$), decelerirano.

3.1.1 Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje

Gibanje je jednoliko ubrzano ako je brzina linearna funkcija vremena:

$$v = v_0 + at \quad (3.4)$$

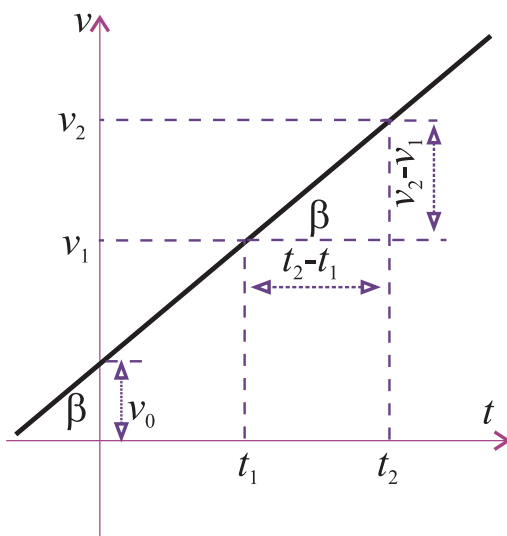
gdje su v_0 (početna brzina – brzina u trenutku $t = 0$.) i a konstante.

Značenje jednadžbe (3.4):

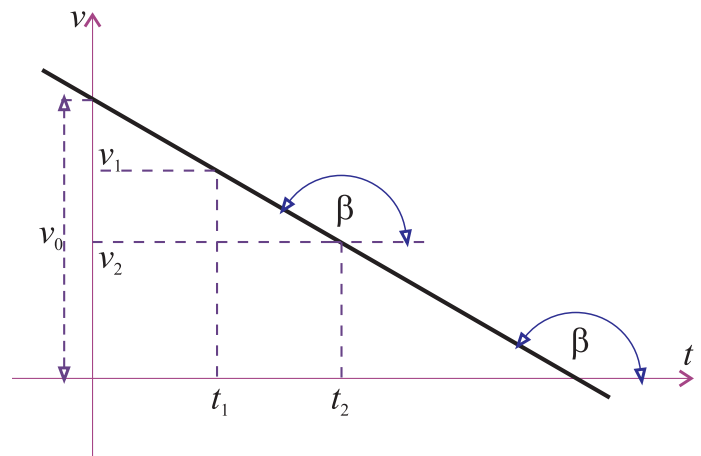
$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_0 + at_2 - (v_0 + at_1)}{t_2 - t_1} = a = \text{konstanta}$$

tj. to je gibanje konstantnom akceleracijom.

3.1.2 Graf ($v - t$) jednoliko ubrzanog gibanja



Slika 5: Graf jednoliko ubrzanog gibanja



Slika 6: Graf jednoliko usporenog gibanja

3.2 Grafičko računanje udaljenosti

U $v - t$ grafu jednolikog gibanja produkt vt je površina označenog pravokutnika. Iz toga je put (udaljenost) $s = vt$ jednak *veličini* površine pravokutnika.

To se može poopćiti za proizvoljno gibanje.

3.2.1 Put i srednja brzina pri jednoliku ubrzanom gibanju

Iz grafa Iz slike 5 vidimo da je površina trapeza, a time i put:

$$s - s_0 = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (3.5)$$

Zamijenimo li $v = v_0 + at$, dobivamo

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (3.6)$$

Dakle, put čestice koja se giba jednoliku ubrzano je kvadratna funkcija vremena, a graf je parabola.

Pomoću diferencijalnog računa Iz definicije jednolikog ubrzanog gibanja:

$$v = at + v_0, \quad a, v_0 \text{ su konstante,}$$

imamo

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0 \Big/ \cdot dt \Big/ \int \rightarrow s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0$$

gdje smo konstantu integracije dobili iz početnog uvjeta

$$\text{za } t = 0 \rightarrow s = s_0 \wedge v = v_0. \quad (3.7)$$

Srednja brzina:

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{l_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} at_2^2 - [l_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} at_1^2]}{t_2 - t_1} = \frac{2v_0 + at_1 + at_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Još jedna formula:

$$a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \Big/ \cdot ds \Big/ \int \rightarrow as = \frac{1}{2} v^2 + C. \quad (3.8)$$

Ovdje smo koristili da je a konstanta, a s C smo označili konstantu integriranja koju dobivamo iz početnog uvjetaEq. (3.7):

$$as_0 = \frac{1}{2} v_0^2 + C,$$

što daje

$$v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0).$$

3.2.2 Kružno gibanje čestice

Neka se čestica giba konstantnom brzinom po kružnici polumjera r . Put koji prijeđe je luk kružnice $\Delta s = \Delta l = r \cdot \Delta \varphi$.

Tangencijalna brzina je brzina gibanja čestice po kružnici. Iz definicije brzine

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot d\varphi}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega,$$

gdje smo s ω izrazili diferencijalnu promjenu kutne koordinate u vremenu, a koju nazivamo *kutnom brzinom*:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.9)$$

Jedinica za kutnu brzinu je

$$[\omega] = \frac{[\alpha]}{[t]} = rad/s.$$

Kutna brzina je vektorska veličina. Vektori \vec{r} , \vec{v} i $\vec{\omega}$ su međusobno okomiti, pa vrijedi:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{3.10}$$

Ubrzanje kod kružnog gibanja Kružno gibanje je ubrzano gibanje jer se smjer vektora brzine nužno mijenja. Vektor ubrzanja \vec{a} može se rastaviti na dvije komponente

$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t, \tag{3.11}$$

radijalnu (centripetalnu) \vec{a}_{cp} i tangencijalnu \vec{a}_t , kao što je prikazano na slici 7

Slika 7: Jednoliko kružno gibanje

3.2.3 Jednoliko kružno gibanje čestice

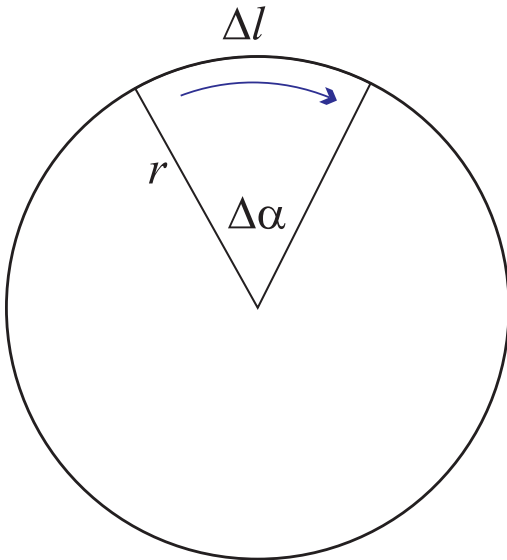
Neka se čestica giba konstantnom brzinom po kružnici polumjera r . Put koji prijeđe je luk kružnice $\Delta l = r \cdot \Delta\alpha$. Za jednoliko gibanje po kružnici je veličina $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ (kutna brzina) konstanta.

Vrijeme T potrebno da čestica učini puni krug zove se *perioda*. *Frekvencija* je

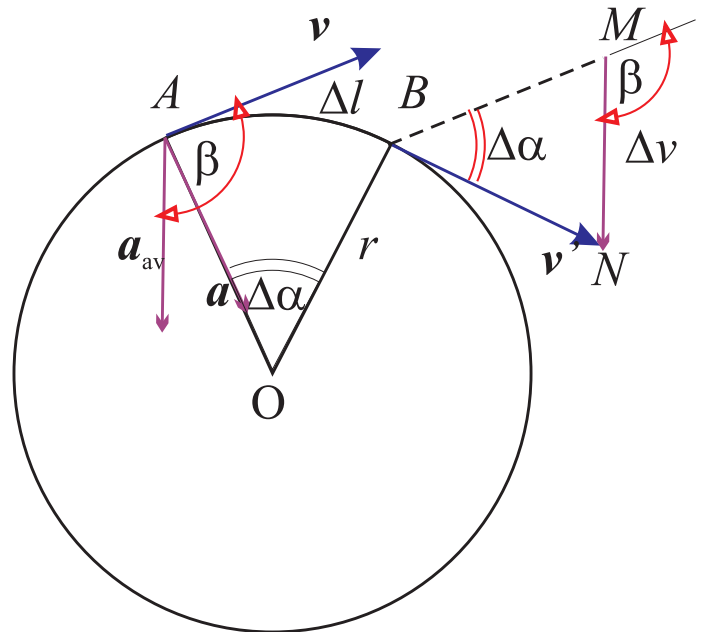
$$\nu = 1/T \tag{3.12}$$

pa je linearna, tangencijalna brzina i kutna brzina

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{3.13}$$



Slika 8: Jednoliko kružno gibanje



Slika 9: Uz izvod akceleracije kod jednolikog kružnog gibanja

ZK:

Ovdje samo staviti velicine kod kruznog gibanja i vezu s pravocrtnim

3.2.4 Ubrzanje pri jednolikom kružnom gibanju

Veličina brzine se ne mijenja: $|\vec{v}| = v = \text{const}$, ali se mijenja smjer brzine (vektora tangente), tj. čestica se giba ubrzano.

Ubrzanje- izvod Konstruirajmo vektor promjene brzine $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$. Za male vrijednosti Δt je luk AB otprilike jednak dužini AB . Trokuti AOB i BMN su slični²

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{r} \rightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

pa je trenutna akceleracija

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} \right) = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot v = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Ovo je veličina akceleracije. Sada smjer: Srednja akceleracija zatvara kut $\beta = \frac{1}{2}(\pi + \Delta\alpha)$ ³. Ali kad $\Delta t \rightarrow 0$ onda i kut $\Delta\alpha \rightarrow 0$, pa je kut između trenutne akceleracije i smjera brzine

$$\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi + \Delta\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.14)$$

Dakle, čestica pri jednolikom gibanju po kružnici ima akceleraciju okomitu na brzinu, tj. duž polumjera prema središtu kružnice. To je *normalna, radijalna, centripetalna* ('Traženje centra').

3.3 Sila

3.3.1 Sila, mjera međudjelovanja tijela

Sva tijela u prirodi međudjeluju na neki način s drugima. Npr., zrak iz atmosfere, molekule vode sa površinom kupača, dijelovi atomske jezgre.

Sila je mjera međudjelovanja tijela ili čestica od kojih se tijelo sastoji.

Riječ dolazi iz Latinskog: 'fortis' što znači *jak*. Također od *napor*.

Koncept sile opisuje djelovanje određenih tijela na druga.

U mehanici termin 'sila' koristimo samo u direktnom smislu: kao mjeru interakcije tijela.

U modernoj fizici razlikujemo sljedeće tipove međudjelovanja:

- (a) gravitacijska interakcija
- (b) elektromagnetna interakcija
- (c) jaka (nuklearna) interakcija
- (d) slaba interakcija

Mehanika se bavi i silama koje se pojavljuju pri direktnom dodiru tijela: trenje i elastične sile. Također se studira gravitacija.

Rezultat interakcije tijela može biti deformacija (promjena veličine ili oblika tijela) ili ubrzanje (promjena veličine ili smjera brzine).

Svaka se od ovih manifestacija može upotrijebiti za mjerenje sile. Glavna komponenta instrumenta za mjerenje sile (*dinamometar* - iz grčkog *dynamis* - snaga ili jačina) je opruga čija deformacija ovisi o veličini sile koja se mjeri.

² $\Delta\alpha$ je u oba trokuta (okomiti pravci), a trokuti su jednakokračni, pa je to dovoljno da su slični

³ $\beta + \gamma = \pi$, $2\gamma + \Delta\alpha = \pi$ gdje je γ unutarnji kut u trokutu BMN

3.3.2 Elastična i plastična deformacija

Za deformaciju tijela se kaže da je *elastična* ako se dimenzija i oblik tijela povrati nakon što prestane djelovanje sile. U suprotnom, kad tijelo djelomično ili potpuno zadrži novostečeni oblik nakon prestanka djelovanja sile, deformacija je *plastična*. Temperatura može jako utjecati na vrstu deformacije.

Iz iskustva znamo da veća sila uzrokuje veću deformaciju. Prema tome, možemo mjeriti veličinu sile po deformaciji koju uzrokuje. Analiza mnogih eksperimenata pokazuje da *veličina elastične deformacije je proporcionalna primjenjenoj sili*. To je otkrio **Robert Hooke (1635.–1703.)** i naziva se *Hookov zakon*.

Pri deformaciji koja dovodi do produljenja ili skraćanja tijela vrijedi dakle

$$F = k(l - l_0) = k\Delta l \quad (3.15)$$

gdje je F veličina primjenjene sile, l_0 – početna duljina tijela, l – duljina deformiranog tijela, k faktor proporcionalnosti, *koeficijent (modul) elastičnosti*.

Koeficijent elastičnosti jednak je veličini sile koja uzrokuje deformaciju jedinične duljine.

Hookov zakon indicira da se skala dinamometra može jednoliko označiti.

3.3.3 Sila je vektor

Svaka sila ima smjer i rezultat djelovanja sile ovisi o smjeru i veličini sile. Npr. sila otpora djeluje uvijek suprotno brzini. Ako se opruga rastegne zbog djelovanja sile, ona će se stegnuti djelovanjem suprotne sile. Kad udarimo loptu ona se ubrza u smjeru sile kojom je udarimo. Koančno, Hookov zakon ukazuje da je sila vektor jer je koeficijent elastičnosti skalar a elongacija $\Delta \vec{l} = \vec{l} - \vec{l}_0$ je vektorska veličina, pa je produkt vektor.

Neka na oprugu djeluje *vanjska sila*. Smjer vanjske sile je isti kao i produljenje. Dakle, ti vektori imaju isti smjer

$$\vec{F}_{\text{vanjska}} = k\Delta \vec{l}. \quad (3.16)$$

Znamo da deformirana opruga djeluje u suprotnom smjeru. To znači da deformirana opruga djeluje na tijelo silom zvanom *elastična sila*, pa je

$$\vec{F}_{e1} = -k\Delta \vec{l}. \quad (3.17)$$

Nakon analiziranja različitih vrsta interakcija tijela Newton je zaključio da *dva tijela uvijek međusobno interagiraju silama koje su jednake po veličini ali suprotne po smjeru*:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.18)$$

gdje je \vec{F}_{12} sila kojom prvo tijelo djeluje na drugo. To se naziva *trećim Newtonovim zakonom gibanja*.

3.4 Težina i masa

3.4.1 Gravitacijska sila. Težina

Iz iskustva znamo da sva tijela padaju na zemlju ako im gibanje ne spriječi drugo tijelo.

Sila kojom Zemlja privlači tijela naziva se gravitacijom ili gravitacijskom silom.

Tijela koja ograničavaju gibanje drugih tijela nazivaju se ograničenjima. Npr. površina stola je ograničenje za sva tijela koja se nalaze na njemu. Zbog gravitacije ograničenje se deformira, i, u skladu s trećim Newtonovim zakonom, reakcija deformiranog ograničenja uravnotežuje gravitacijsku silu. Deformaciju opruge je lako zapaziti (uteg na opruzi), dok deformaciju stola ne zapažamo tako lako (za lakše predmete).

Težina je sila kojom tijelo djeluje na ograničenje zbog Zemljinog privlačenja tog tijela.

3.4.2 Slobodni pad

Slobodni pad je gibanje tijela na koje djeluje samo gravitacijska sila.

Slobodni pad svih tijela potpuno je jednak bez obzira na njihovu težinu. Sva tijela padaju jednakom akceleracijom $g = 9.81\text{m/s}^2$. Akceleracija slobodnog pada pomalo se razlikuje na raznim točkama Zemljine površine (manje od 0.6%).

3.4.3 Masa tijela

Omjer gravitacijske sile prema ubrzanju slobodnog pada za dano tijelo na bilo kojoj točki Zemlje ima konstantnu vrijednost:

$$\frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \frac{P_3}{g_3} = \dots = \text{konstanta.}$$

Dakle omjer P/g je karakteristika tijela, zovemo je *masom*”

$$m = \frac{P}{g}. \quad (3.19)$$

Koncept mase je jedan od najvažnijih u fizici.

Masa je skalarna veličina. Bolje je napisati jednadžbu (3.19) u vektorskom obliku:

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (3.20)$$

Kako je akceleracija slobodnog pada jednaka za sva tijela, vrijedi

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad (3.21)$$

tj. *omjer masa dva tijela jednak je omjeru njihovih težina.*

3.5 Osnovni zakoni dinamike

3.5.1 Sila i akceleracija

Iz zakona inercije slijedi da tijelo ne može mijenjati brzinu samo od sebe, bez interakcije s okolnim tijelima. Svaka promjena veličine ili smjera brzine tijela uzrokovana je djelovanjem vanjskih tijela na njega. Tu akciju karakteriziraju sile. *Osnovni zakon dinamike ili Newtonov drugi zakon gibanja* daje relaciju između sile i promjene brzine tijela.

Najjednostavniji oblik osnovnog zakona valjan je u inercijalnim sustavima.

Rezultati mnogobrojnih pokusa se mogu sumirati u sljedećem:

- (a) Ako se tijelo giba ubrzano u odnosu na neki inercijalni sustav, na njega djeluje sila
- (b) Sila stvara akceleraciju koja je proporcionalna toj sili i istog je smjera. Za danu akceleraciju, sila je proporcionalna masi tijela koje se ubrzava.
- (c) Pri brzinama mnogo manjim od brzine svjetlosti, sila ne ovisi o brzini ubrzanog tijela.

Matematički:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.22)$$

Ovaj se zakon može napisati i u malo izmjenjenom obliku. Iz definicije akceleracije

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

dobivamo

$$\vec{F} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}. \quad (3.23)$$

Definiramo (*linearni*) *moment, veličina gibanja* kao umnožak mase tijela i njegove brzine

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (3.24)$$

pa osnovni zakon gibanja kaže da je *sila jednaka promjeni momenta u jedinici vremena*

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}. \quad (3.25)$$

To je najopćenitiji oblik osnovnog zakona dinamike.

Konačno, ako na tijelo djeluje više sila s rezultantom \vec{R} , Newtonov 2. zakon je

$$\vec{R} = m\vec{a} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}. \quad (3.26)$$

3.5.2 Primjena osnovnog zakona dinamike

Korištenjem osnovnog zakona dinamike možemo odrediti sile koje djeluju na tijelo ili, ako znamo sile način gibanja tijela.

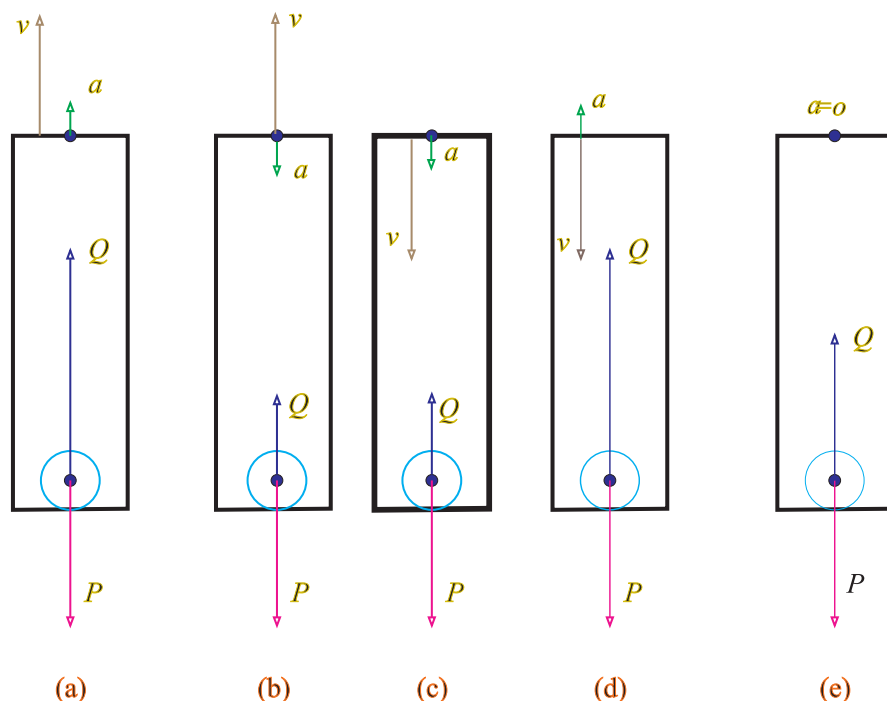
Pri pisanju jednažbi gibanja imamo sljedeća pravila:

- i. prvo, potrebno je naći *sve* sile koje djeluju na tijelo
- ii. onda treba odrediti rezultantnu silu
- iii. na osnovi 2. Newtonovog zakona, treba izjednačiti rezultantu (sila) s produktom mase i akceleracije (za svaku masu)

Pr.1 Putnik mase m stoji na podu lifta. Odredite silu koju osjeća putnik ako se lift giba:

- (a) vertikalno gore jednoliko ubrzano s akceleracijom a .
- (b) vertikalno gore usporeno.
- (c) vertikalno dolje ubrzano
- (d) vertikalno dolje usporeno
- (e) jednolikom brzinom,

Kako putnik miruje u odnosu na lift, on se prema Zemlji giba istim ubrzanjem kao lift. Iz 3. Newtonovog zakona, pod lifta djeluje istom silom na putnika kao što putnik djeluje na njega ali suprotnog smjera. Dakle, na putnika djeluju dvije sile: gravitacijska sila \vec{P} i reakcija poda \vec{Q} .



Slika 10: Gibanje lifta s putnikom

Izaberimo koordinatni sustav sa z -osi vertikalno gore. Tada je reakcija pozitivni vektor a gravitacijska sila negativna. Smjer ubrzanja je u (a) i (d) slučaju pozitivan, djeluje prema gore. U (b) i (c) vektor akceleracije je prema dolje.

Jednadžba gibanja u vektorskom obliku:

$$\vec{P} + \vec{Q} = m\vec{a}. \quad (3.27)$$

U skalarnom obliku moramo uzeti u obzir smjer vektora:

Slučajevi (a) i (d):

$$-P + Q = ma \rightarrow Q = P + ma = m(g + a).$$

Za (b) i (c) slučaj:

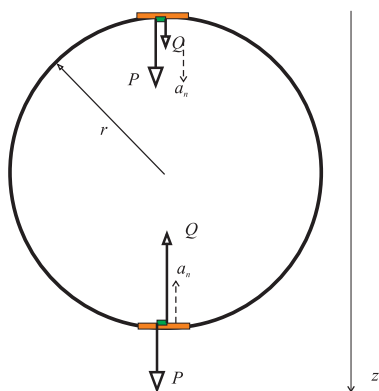
$$-P + Q = -ma \rightarrow Q = m(g - a).$$

Konačno za (e) slučaj

$$-P + Q = 0 \rightarrow Q = P.$$

Dakle, ako se lift giba ubrzano u odnosu na Zemlju, on je neinercijalni sustav, pa je sila kojom tijelo djeluje na pod različita od gravitacijske sile.

pr. 2 Avion koji se giba brzinom v pravi luping polumjera r u vertikalnoj ravnini. Kojom silom pilot pritišće sjedalo? Kojom minimalnom brzinom se mora gibati avion da on ostaje na sjedalu?



Slika 11: Luping

Umjesto gledanja sile kojom pilot pritišće sjedalo, odredit ćemo suprotnu reakciju sjedala. Na pilota djeluju dvije sile: reakcija sjedala i privlačenje Zemlje. U donjoj točki, reakcija je prema gore, a u gornjoj prema dolje. Centripetalna akceleracija je $a_n = v^2/r$ i djeluje prema centru. U donjoj točki smjer joj je vertikalno prema gore, u gornjoj prema dolje.

Izaberimo z -os vertikalno dolje. Vektorska jednadžba gibanja je

$$\vec{P} + \vec{Q} = m\vec{a}_n.$$

Projekcijom na Z -os, u donjoj točki je

$$P - Q = 0 \frac{mv^2}{r} \rightarrow Q = P + \frac{mv^2}{r} = m \left(\frac{v^2}{r} + g \right).$$

Dakle, pilot osjeća preopterećenje. Za gornju točku:

$$P + Q = \frac{mv^2}{r} \rightarrow Q = m \left(\frac{v^2}{r} - g \right).$$

Pilot ostaje u sjedalu ako je $Q > 0 \rightarrow v^2/r \geq g$. Minimalna brzina je

$$v_{\min} = \sqrt{gr}.$$

3.5.3 Beztežinsko stanje

U inercijalnom sustavu je težina jednaka gravitacijskoj sili.

Sustav koji se giba ubrzano u odnosu na neki inercijalni sustav naziva se *neinercijalnim sustavom*.

Kad je svemirski brod u orbiti oko Zemlje, njegova je akceleracija jednaka gravitacijskoj, tj. $\vec{a} = \vec{g}$. Upotrijebimo relaciju (3.27) nalazimo da je $Q = 0$. Dakle, astronaut ne silu pritiska, reakcije, on je u bestežinskom stanju.

Možemo zaključiti da se *bestežinsko stanje postiže u neinercijalnom sustavu koji se giba ubrzanjem $\vec{a} = \vec{g}$ u odnosu na Zemlju*.

Zapazite da takva akceleracija ne zahtjeva neku određenu vrstu gibanja (po pravcu, kružnici). Važan je samo uvjet $\vec{a} = \vec{g}$.

3.6 Jednadžbe gibanja i početni uvjeti

Mnogi se problemi u astronomiji, transportu i mnogim drugim poljima znanosti i tehnike mogu formulirati na sljedeći način: za dano tijelo i sile koje djeluju na njega nađite jednadžbu gibanja tijela, tj. izrazite koordinate kao funkciju vremena.

To je *osnovni problem dinamike* kojeg možemo formulirati: *Odredite jednadžbe gibanja čestice kad su poznate sve sile koje djeluju na nju*.

Pri rješavanju problema, počnemo određivanjem akceleracije čestice iz Newtonovog drugog zakona. Tada, iz kinematičkih formula nalazimo brzine i koordinate čestice.

3.6.1 Gibanje čestice pod utjecajem gravitacijske sile - kosi hitac.

Pretpostavimo da samo na tijelo djeluje samo gravitacijska sila. Pretpostavljamo da je brzina mala, tako da zanemarimo otpor zraka.

Koristimo koordinatni sustav fiksiran na Zemljinu površinu, i uzmimo da je on inercijalan.

Sila koja djeluje na česticu je

$$\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g} \rightarrow F_x = F_y = 0, F_z = -mg. \quad (3.28)$$

Drugi Newtonov zakon daje

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = 0, \quad F_z = ma_z = -mg. \rightarrow a_x = a_y = 0, \quad a_z = -g. \quad (3.29)$$

Čestica se giba bez akceleracije, tj. jednoliko duž x -osi, pa je njena x -koordinata linearna funkcija vremena.

$$v_x = u_0 = \text{konstanta}, \quad x = x_0 + u_0 t \quad (3.30)$$

Slično za ordinatu:

$$v_y = w_0 = \text{konst}, \quad y = y_0 + w_0 t. \quad (3.31)$$

Duž z -osi čestica se giba konstantnom akceleracijom, pa je brzina linearna funkcija vremena, a koordinata kvadratna funkcija vremena.

$$v_z = v_0 + a_z t = v_0 - gt, \quad z = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_z t^2 = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (3.32)$$

Tako smo pronašli jednadžbe gibanja:

$$x = x_0 + u_0 t, \quad y = y_0 + w_0 t, \quad z = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (3.33)$$

Ove jednadžbe gibanja sadrže 6 proizvoljnih konstanti: početne koordinate i početne brzine. ovaj sistem daje *sve moguće slučajeve* gibanja čestice pod djelovanjem gravitacijske sile. Za specijalni slučaj moramo specificirati početne uvjete.

Pretpostavimo da je tijelo bačeno gore iz ishodišta pod kutom α prema horizontu brziom V_0 tako da je ona u xz -ravnini. Tada su početni uvjeti:

$$w_0 = 0, \quad u_0 = V_0 \cos \alpha, \quad v_0 = V_0 \sin \alpha, \quad x_0 = y_0 = z_0. \quad (3.34)$$

Tada su jednačbe gibanja:

$$y = 0, \quad x = V_0 t \cos \alpha, \quad z = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3.35)$$

Iz druge jednačbe nalazimo $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$ što uvrstimo u treću jednačbu i dobivamo jednačbu putanje:

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (3.36)$$

To je jednačba parabole. Doseg kosog hica nalazimo kad uzmemo da je $z = 0$ i $x = L$:

$$L = \frac{2V_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin^2 2\alpha}{g}. \quad (3.37)$$

Maksimalni se domet postiže za kut od 45° .

Specijalni slučajevi:

- a) **horizontalni hitac:** tijelo se baci s određene visine h horizontalno brzinom u_0 .
- b) **vertikalni hitac:** Tijelo se baci vertikalno gore iz ishodišta početno brzinom v_0 .

3.6.2 Numeričko rješavanje osnovnog problema dinamike

U slučaju konstantne sile lako je riješiti jednačbe gibanja. No, ako se sila mijenja, potrebna je viša matematika za nalaženje općih jednačbi gibanja. Ali se određeno rješenje može dobiti numeričkim metodama.

Izračunavanje se temelji na sljedećem:

Srednja akceleracija je za vrijeme vremenskog intervala $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ određena s

$$\bar{a} = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t}.$$

Pretpostavimo da se za male Δt srednja akceleracija malo razlikuje od trenutne u konačnom trenutku $t = t_n$, dobivamo približno

$$v_n \approx v_{n-1} + a_n \Delta t. \quad (3.38)$$

Sličnu jednačbu dobivamo za srednju brzinu

$$\bar{v}_n \approx v_{n-1} + a_n \Delta t \approx \frac{v_n + v_{n-1}}{2} \quad (3.39)$$

odakle je

$$x_n = x_{n-1} + \bar{v}_n \Delta t. \quad (3.40)$$

To je sve što nam je potrebno za numeričko izračunavanje jednačbi gibanja. Znamo li koordinate i brzinu čestice u određenom početnom trenutku, možemo izračunati akceleraciju iz 2. Newtonovog zakona. Tada iz jednačbe (3.38) računamo brzinu nakon Δt sekundi i po jednačbi (3.40) koordinate. Nove koordinate i brzine nam služe za sljedeći korak (iteraciju). Nakon konačnog broja takvih koraka nalazimo brzinu i koordinatu za određeni trenutak.

Očito, manji Δt bi trebalo dati točniji rezultat.

3.6.3 Gibanje harmonijskog oscilatora

Harmonijska (elastična) sila $\vec{F} = -k\vec{x}$ djeluje na česticu, pa je osnovni zakon dinamike

$$-k\vec{x} = m\vec{a} \rightarrow -kx = ma_x, \quad 0 = ma_y, \quad 0 = ma_z. \quad (3.41)$$

Pretpostavimo početne uvjete: $y_0 = z_0 = v_{y0} = v_{z0} = 0$, pa se čestica giba samoduž x -osi akceleracijom

$$a_x = a = -\frac{k}{m}x. \quad (3.42)$$

Za numeričko rješenje uzmimo konkretne vrijednosti za $k/m = \pi^2/4 = 2.467$, početne uvjete: $x_0 = 1$ i $v_0 = 0$. Neka je vremenski interval $\Delta t = 0.1$ s.

Akceleracija za vrijeme prvog intervala je približno

$$a_0 = -2.467x_0 = -2.467.$$

Konačna je brzina nakon $\Delta t = 0.1$

$$v_0^{\text{kon}} = v_0 + a_0\Delta t = -0.2467.$$

Srednja brzina za vrijeme tog vremenskog intervala je

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_0^{\text{kon}}) = -0.1234.$$

Koordinata čestice na kraju vremenskog intervala je

$$x_1 = x_0 + \bar{v}_0\Delta t = 0.988.$$

Nastavljamo s

$$a_1 = -2.467x_1 = -2.437 \rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_0 + a_1\Delta t = -0.367.$$

Daljnja iteracija $x_2 = 0.951$, $a_2 = -2.347$, $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + a_2\Delta t = -0.602$ itd. Cijela je tablica (postupak) u **Fiz-inf.xls** ili u **ho02e2.nb** ili **ho02YP.nb**.

3.7 Gravitacija

3.7.1 Otkriće zakona gravitacije

Početkom 17. stoljeća, većina znanstvenika prihvatila je valjanost heliocentričke teorije (**Kopernik**) sunčevog sustava. Zemlja i planeti se okreću oko Sunca koje je središte našeg planetarnog sustava. Ali niti zakoni gibanja planeta niti uzrok prirode gibanja nisu bili jasni znanstvenicima tog vremena.

Njemački astronom **Johanes Kepler** (1571.–1630.) analizirajući podatke danskog astronoma **Tycho-a Brahe-a** (1546.–1601.) deducirao je zakone gibanja planeta oko Sunca. Ali je tek Engleski znanstvenik Sir **Isaak Newton** rješio problem i objavio ga 1687. u knjizi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Za prvu aproksimaciju možemo pretpostaviti da se planet okreće oko Sunca jednoliko po kružnici. Na njega djeluje centripetalna sila-akceleracija u smjeru centra orbite gdje je smješteno Sunce.

Znamo da se Mjesec vrti oko Zemlje. Slično privlačenje kao gore vrijedi i ovdje.

Newton je pretpostavio da gravitacijska sila koja djeluje na tijela blizu površine Zemlje je ista ona koja djeluje na Mjesec. To je demonstrirano usporedbom akceleracije slobodnog pada s normalnom (centripetalnom) akceleracijom kojom se Mjesec okreće oko Zemlje.

Ova normalna akceleracija može se izračunati iz sljedećih podataka. Udaljenost Mjeseca od Zemlje je $r = 384403$ km = $3.84 \cdot 10^8$ m/s. Perioda vrtnje Mjeseca oko Zemlje je $T = 27.322$ dana = $27.3 \cdot 24 \cdot 3600$ s. Orbitalna brzina je $v = 2\pi r/T$ a normalna akceleracija

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 2.72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2. \quad (3.43)$$

Kao što vidimo, normalna akceleracija Mjeseca je mnogo manja od gravitacijskog ubrzanja. Newton je objasnio razliku hipotezoma da *gravitacijska sila opada s povećanjem udaljenosti među tijelima koja interagiraju u skladu s određenim pravilom*, koje ćemo sada izvesti. Znamo da je akceleracija slobodnog pada *blizu površine Zemlje* jednaka 9.81 m/s². Tada je udaljenost od središta Zemlje jednaka srednjem polumjeru $R = 6371$ km = $6.37 \cdot 10^6$ m. S druge je strane normalna akceleracija Mjeseca dobivena za *točku na njegovoj orbiti* kad je udaljenost interagirajućih tijela jednaka polumjeru lunarne orbite $r = 3.84 \cdot 10^8$ m. Iz proporcionalnosti

$$\frac{g}{a_n} = \left(\frac{r}{R}\right)^m \rightarrow m = 2. \quad (3.44)$$

Dakle, akceleracija zbog gravitacijskog privlačenja inverzno je proporcionalna kvadratu udaljenosti, pa je

$$a_n = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{K}{r^2}, \quad K = \text{konst.} \quad (3.45)$$

3.7.2 Newtonov zakon univerzalne gravitacije

Iz ovog gore slijedi da se sva tijela u prirodi privlače međusobno silom zvanom *sila gravitacijskog privlačenja*, i da akceleracija zbog sile opada obrnuto proporcionalno kvadratu udaljenosti između interagirajućih tijela.

Pretpostavimo da su dva tijela masa m_1 i m_2 smještena na međusobnoj udaljenosti r . Ona interagiraju silama $F_1 = m_1 a_1$ i $F_2 = m_2 a_2$. Newtonov 3. zakon: $F_1 = F_2$:

$$\frac{m_1 K_1}{r^2} = \frac{m_2 K_2}{r^2}. \quad (3.46)$$

Jednadžba će vrijediti i ako pretpostavimo $K_1 = \Gamma m_2$ i $K_2 = \Gamma m_1$, gdje je Γ konstanta:

$$F = m_1 a_1 = \frac{m_1 K_1}{r^2} = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

odnosno

$$F = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (3.47)$$

U vektorskom obliku:

$$\vec{F} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0 = -\Gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (3.48)$$

Sad se zakon univerzalne gravitacije može iskazati kako slijedi: *Gravitacijska sila između dvije točkaste mase (čestica) proporcionalna je produktu njihovih masa i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti među njima.*

Testiranje se može napraviti samo s konačnim tijelima (ne s matematičkim točkama, česticama).

Faktor proporcionalnosti Γ je univerzalna *gravitacijska konstanta*. PO veličini ona je jednaka sili kojom interagiraju dvije čestice jediničnih masa ($m_1 = m_2 = 1$ kg) na jediničnoj udaljenosti ($r = 1$ m).

3.7.3 Cavendishev eksperiment

Engleski znanstvenik **Henry Cavendish** (1731.–1810.) je 1798. napravio eksperiment da izmjeri silu gravitacijskog privlačenja u laboratoriju i tako odredi gravitacijsku konstantu. Uređaj se sastojao od *torzijske vage*.

Najtočnija mjerenja daju za $\Gamma = (6.6732 \pm 0.0031) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

3.7.4 Određivanje udaljenosti od Sunca do planeta

Primjenimo zakon univerzalne gravitacije za računanje. Da pojednostavnimo problem pretpostavit ćemo da se planeti gibaju po kružnoj putanji oko Sunca.

$$a_n = F/m = \Gamma M/r^2 = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$$

pa je

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (3.49)$$

što daje

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\Gamma M}{4\pi^2} = \text{konstanta}. \quad (3.50)$$

Dakle, *kubovi srednjih udaljenosti planeta od Sunca proporcionalni su kvadratima njihovih perioda* - **Keplerov 3. zakon**.

3.7.5 Gravitacijsko polje

U modernoj fizici mehanizam gravitacijskog međudjelovanja se objašnjava na sljedeći način: Svaka čestica mase M uspostavlja polje koje mijenja okolni prostor. Kad se testno tijelo mase m stavi u to polje, polje djeluje silom F na njega u ovisnosti o osobinama polja u toj točki i masi m testnog tijela. Naravno, i testno tijelo uspostavlja svoje polje u prostoru oko njega i na taj način djeluje na tijelo mase M .

Prazan prostor ima brojna geometrijska i fizička svojstva. Kad je tijelo mase M dovedeno u određeno područje u prostoru, ono mijenja osobine tog prostora.

Gravitacijsko polje je materijalno. Postoji neovisno o našoj svijesti i može se detektirati djelovanjem na fizičke predmete. Gravitacijsko je polje oblik materije.

3.7.6 Intenzitet gravitacijskog polja

Intenzitet \vec{I} polja definiramo kao omjer sile na testno tijelo i njegove mase:

$$\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\Gamma M}{r^2} \hat{r}. \quad (3.51)$$

Evidentno, intenzitet gravitacijskog polja se podudara s akceleracijom testnog tijela. Kako intenzitet polja ne ovisi o masi tijela, sva tijela, bez obzira na njihovu masu, gibaju se jednakom akceleracijom u danoj točki gravitacijskog polja.

3.7.7 Zemljino gravitacijsko polje

Tijelo na morskoj površini Zemlja privlači silom

$$P_0 = mg_0 = \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad (3.52)$$

gdje je M masa, R radijus Zemlje, g_0 akceleracija slobodnog pada na morskoj razini.

Na visini h iznad površine mora je sila

$$P = mg = \Gamma \frac{Mm}{(R+r)^2}. \quad (3.53)$$

Možemo odrediti masu Zemlje:

$$g_0 = \frac{\Gamma M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g_0 R^2}{\Gamma} = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Slično za masu Sunca:

$$R = 149.5 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad T = 1 \text{ god} = 31.56 \cdot 10^6 \text{ s} \rightarrow a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 5.9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

pa je

$$M_S = \frac{aR^2}{\Gamma} = 1.98 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 330000M_Z.$$

3.7.8 Efekt zemljine rotacije na akceleraciju slobodnog pada

Pretpostavimo da se tijelo mase m nalazi u točki A na geografskoj širini φ . Tijelo se rotira zajedno sa Zemljom po krugu polumjera $r = R \cos \varphi$. Normalna je akceleracija tada:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2}$$

gdje je T period rotacije na Zemlji.

Da bismo našli silu, moramo rastaviti silu gravitacijskog privlačenja \vec{F}_g u dvije komponente: centripetalnu silu \vec{F}_n i gravitacijsku silu \vec{P} .

3.7.9 Gibanje planeta[3]

Označimo udaljenost planeta od sunca s $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tada je sila kojom Sunce djeluje na planetu

$$\vec{F}_G = -\Gamma \frac{mM}{r^2} \vec{r}_0. \quad (3.54)$$

Po komponentama:

$$F_x = -\Gamma M m \frac{x}{r^3}, \quad F_y = -\Gamma M m \frac{y}{r^3}$$

Jednadžbe gibanja:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dv_x}{dt} \right) &= -\Gamma M m \frac{x}{r^3}, \\ m \left(\frac{dv_y}{dt} \right) &= -\Gamma M m \frac{y}{r^3}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Da si pojednostavnimo posao, možemo odabrati jedinicu vremena ili masu Sunca da je $\Gamma M \equiv 1$. Uzmimo da je u početnom trenutku planeta na $x = 0.5$ i $y = 0$, a brzina kojom kreće u y -smjeru veličine 1.63.

Pogledajmo sada kako možemo izračunati putanju Neptuna, Jupitera, Urana ili bilo kojeg drugog planeta. Sad moramo računati silu na određenu planetu, recimo i , koja se nalazi u položaju (x_i, y_i, z_i) . Moramo znati položaj svih planeta, recimo j - (x_j, y_j, z_j) - oni djeluju na i . planet. Jednadžbe gibanja su tada:

$$\begin{aligned} m_i a_{ix} &= \sum_{j=0}^N -\Gamma m_i m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} = -\Gamma M m_i \frac{x_i}{r_i^3} + \sum_{j=1}^N -\Gamma m_i m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} \\ m_i a_{iy} &= \sum_{j=0}^N -\Gamma m_i m_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3} = -\Gamma M m_i \frac{y_i}{r_i^3} + \sum_{j=1}^N -\Gamma m_i m_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3} \\ m_i a_{iz} &= \sum_{j=0}^N -\Gamma m_i m_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3} = -\Gamma M m_i \frac{z_i}{r_i^3} + \sum_{j=1}^N -\Gamma m_i m_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3} \end{aligned} \quad (3.56)$$

gdje smo uzeli da Sunce ($j = 0$) miruje u ishodištu. Udaljenost planeta od Sunca je r_i a udaljenost dvaju planeta je

$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \quad (3.57)$$

3.8 Zakon očuvanja impulsa

3.8.1 Zatvoreni sustav

Precizno rješenje problema gibanja zahtjeva da se sve sile koje djeluju na tijelo uzmu u obzir. Ali, gotovo je beskonačno mnogo tijela u okolini koja djeluju silom na dano tijelo, a još se pri tome gibaju zbog međusobne interakcije. Zbog toga se zasigurno ne bi moglo pronaći rješenje problema zbog ogromnih matematičkih teškoća.

Problem se pojednostavljuje tako da ne uzimamo sva tijela u okolini u razmatranje. Npr. na satelit koji kruži oko Zemlje na udaljenosti $r = 8000$ km od središta Zemlje, Sunce djeluje mnogo manjom silom nego Zemlja:

$$\frac{F_Z}{F_S} = \frac{\Gamma m M_Z R_{ZS}^2}{r^2 \Gamma m M_S} = \frac{M_Z R_{ZS}^2}{M_S r^2} \approx 1000$$

Ovdje je $R_{ZS} = 1 \text{ AU} = 1.5 \cdot 10^8$ km, $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

Ovaj račun pokazuje da u prvoj aproksimaciji možemo zanemariti utjecaj svih tijela osim Zemlje na satelit.

Uobičajeno je zvati sve sile koje dolaze iz danog sustava *internim-unutarnjim silama*, a sile koje na cijeli sistem djeluju iz okoline *eksternim - vanjskim silama*.

Sustav nazivamo *zatvorenim - izoliranim* ako se, u usporedbi s unutarnjim silama, vanjske sile mogu zanemariti.

U gornjem primjeru sistem Zemlja–satelit se u prvoj aproksimaciji može smatrati zatvorenim. Pr. Sunčev sustav je zatvoren sistem.

3.8.2 Zakon očuvanja impulsa

Za zatvoreni sustav, zakon očuvanja impulsa glasi: *ukupni impuls zatvorenog sustava ostaje konstantan* za bilo koji proces unutar sustava.

Naravno, impuls pojedinog tijela unutar sustava se zbog unutarnjih sila mijenja. *Samo vektorska suma impulsa svih komponenti sustava ostaje konstantnom.*

Neka imamo dva tijela u zatvorenom sustavu. Neka je prvo tijelo u t_1 ima masu m'_1 brzinu \vec{v}'_1 , drugo masu m'_2 brzinu \vec{v}'_2 . U nekom kasnijem trenutku su mase i brzine $m_1, \vec{v}_1, m_2, \vec{v}_2$. Za prvo tijelo je Newtonov drugi zakon:

$$\vec{F}_{12} = \frac{m_1\vec{v}_1 - m'_1\vec{v}'_1}{t_2 - t_1}$$

a za drugo

$$\vec{F}_{21} = \frac{m_2\vec{v}_2 - m'_2\vec{v}'_2}{t_2 - t_1}.$$

Iz 3. Newtonovog zakona je $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ili

$$\frac{m_2\vec{v}_2 - m'_2\vec{v}'_2}{t_2 - t_1} = -\frac{m_1\vec{v}_1 - m'_1\vec{v}'_1}{t_2 - t_1}$$

iz toga dobivamo

$$m_2\vec{v}_2 + m_1\vec{v}_1 = m'_2\vec{v}'_2 + m'_1\vec{v}'_1 = \text{konstanta}$$

za bilo koji trenutak vremena.

3.8.3 Centar mase

Neka se dvije čestice masa m_1 i m_2 nalaze na x -osi s koordinatama x_1 i x_2 . Udaljenost među česticama je $l = |x_2 - x_1|$. Neka točka C , *centar masa*, dijeli udaljenost među česticama u duljine obrnuto proporcionalne njihovim masama:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.58)$$

Kako je $l_1 = x_c - x_1$, a $l_2 = x_2 - x_c$, gdje je x_c koordinata od C , imamo

$$m_1(x_c - x_1) = m_2(x_2 - x_c) \rightarrow x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad (3.59)$$

Generalizacija na više, N , čestica:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (3.60)$$

Slično za y i z komponentu pa je općenito:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (3.61)$$

3.8.4 Gibanje centra masa

Napišemo li jednadžbu (3.60) u dva različita trenutka, pa oduzmemo jedno od drugoga dobivamo:

$$\Delta x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \Delta x_i}{M}. \quad (3.62)$$

Nakon dijeljenja s $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$:

$$v_c^{(x)} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_i^{(x)}}{M} \quad (3.63)$$

odnosno u vektorskom obliku:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (3.64)$$

gdje je M ukupna masa, a \vec{P} ukupni impuls sistema.

Za zatvoreni sistem je ukupni impuls konstantan, pa je iz gornje jednadžbe i brzina centra masa konstantna. Drugim riječima *centar masa zatvorenog sustava se giba jednoliko po pravcu bez obzira na gibanje sastavnica.*

3.9 Energija

Pojam energije jedan je od najvažnijih pojmova fizike. Energija je sposobnost tijela da vrši rad.

3.9.1 Kinetička energija

Kinetička energija je energije gibanja

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.65)$$

3.9.2 Kinetička energija i rad

Neka sila \vec{F} djeluje na tijelo. Kut α je kut kojeg zatvara sa smjerom gibanja. Rastavimo silu na tangencijalnu $F_t = F \cos \alpha$ i normalnu $F_n = F \sin \alpha$ komponentu.

Normalna komponenta sile mijenja samo smjer vektora brzine, ali ne mijenja njenu veličinu. Dakle, normalna komponenta ne utječe na kinetičku energiju tijela.

Tangencijalna komponenta sile mijenja veličinu brzine (ili impulsa), ali ne njen smjer. Dakle, do promjene kinetičke energije dolazi zbog tangencijalne komponente sile. Ta se komponenta može napisati kao

$$F_t = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Pretpostavimo da se za vrijeme kratkog vremena Δt tijelo pomaknulo za kratku udaljenost Δl . Promjena kinetičke energije je

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(v_2 - v_1) \cdot (v_2 + v_1)}{2} = m \Delta v \cdot \bar{v} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot \Delta t = F_t \cdot \Delta l. \quad (3.66)$$

Ovu veličinu zovemo *elementom rada*:

$$\Delta W = F_t \Delta l = F \Delta l \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{\Delta l}. \quad (3.67)$$

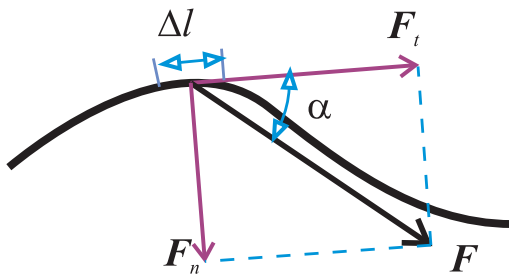
Vidimo da je

$$\Delta W = \Delta K$$

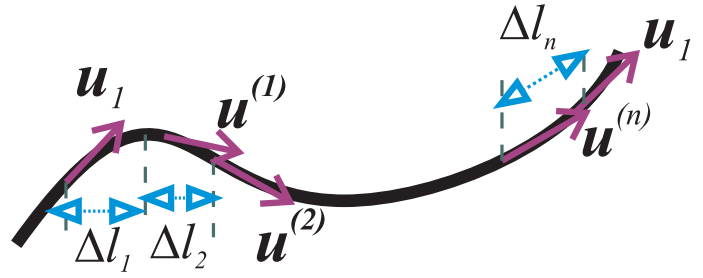
tj. *element rada jednak je infinitesimalnoj promjeni kinetičke energije tijela.*

Pogledajmo slučaj rada kojeg čini proizvoljna sila preko konačno dugačkog puta. Prvo razdjelimo putove na male dijelove $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. Za svaki takav dio vrijedi

$$\Delta W_1 = \Delta K_1 = K_1 - K_0, \quad \Delta W_2 = \Delta K_2 = K_2 - K_1, \quad \dots, \quad \Delta W_n = \Delta K_n = K_n - K_{n-1}.$$



Slika 12: Element rada



Slika 13: Ukupni rad duž putanje

Zbrojimo sve ove elemente rada i označimo ukupni (totalni) rad učinjen duž putanje s W , dobivamo

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n = K - K_0. \quad (3.68)$$

Dakle, rad kojeg je učinila sila preko konačnog puta jednak je promjeni kinetičke energije tijela.

3.9.3 Snaga

Srednja snaga za vrijeme intervala Δt definira se kao rad u jedinici vremena

$$\bar{P} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (3.69)$$

Trenutna snaga je granična vrijednost srednje snage za infinitezimalni vremenski interval:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(F_t \frac{\Delta l}{\Delta t} \right) = F_t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = F_t v = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.70)$$

gdje je v veličina trenutne brzine \vec{v} .

3.9.4 Jedinice za energiju, rad i snagu

Kako je rad mjera promjene energije, rad i energija mjere se istim jedinicama.

Jedinica za rad u SI sustavu je *Džul-Joule* J. Joule je rad kojeg učini sila od 1 N preko udaljenosti od 1 m.:

$$1J = 1N \cdot 1m = kgm^2/s^2.$$

Rad ima dimenzije

$$[W] = [F][l] = [m][l]^2[t]^{-2}.$$

Ista je jedinica za energiju.

U atomskoj fizici se koristi jedinica *elektronvolt* eV:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Jedinica za snagu je *watt* W:

$$1W = 1J/s.$$

Isto konjska snaga

$$1 \text{ hp} = 735.499 \text{ W}.$$

3.10 Konzervativne sile i potencijalna energija

Kao što je rečeno, element rada je

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l} = F \Delta l \cos \alpha.$$

On može biti pozitivan ili negativan. Da izračunamo rad duž konačnog puta, podijelimo put na male dijelove i izračunamo element rada duž svakog pomaka, te sumiramo te elemente:

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \sum_{i=1}^n F_t^{(i)} \Delta l_i. \quad (3.71)$$

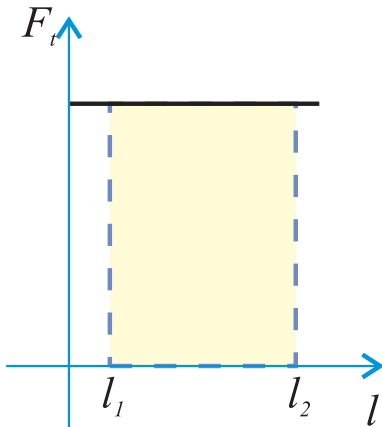
Uvijek se pri ovoj sumaciji uvodi greška ovisna o podjeli puta. Točna se vrijednost dobiva samo u *granici*, tj. kad je put podijeljen u beskonačno mnogo beskonačno (infinitesimalno) malih pomaka:

$$W = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_t^{(i)} \Delta l_i. \quad (3.72)$$

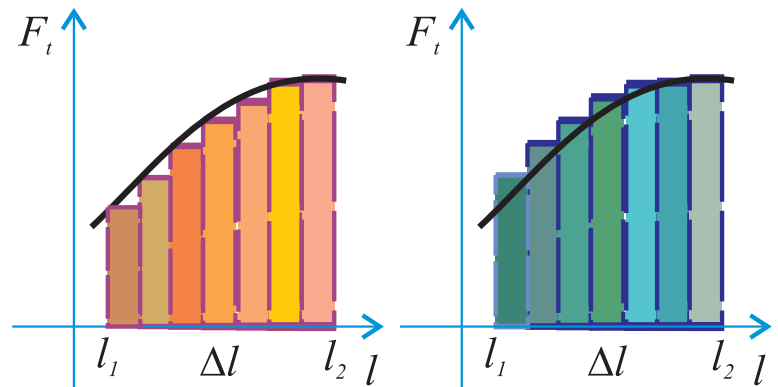
Rad kojeg vrši konstantna sila je

$$W = F_t \sum_{i=1}^n \Delta l_i = F_t l = Fl \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{l}. \quad (3.73)$$

Ovaj se rad može reprezentirati grafom na slici 14. Ovdje je rad numerički jednak površini šrafranog pravou-



Slika 14: Rad kad je sila konstantna



Slika 15: Rad varijabilne sile

kutnika.

U općem slučaju, tangencijalna komponenta sile je varijabilna (slika 15). Rad možemo izračunati grafički podijelivši put l na male dijelove. Ovisno uzmemo li manje ili veće pravokutnike dobivamo donju ili gornju granicu za rad:

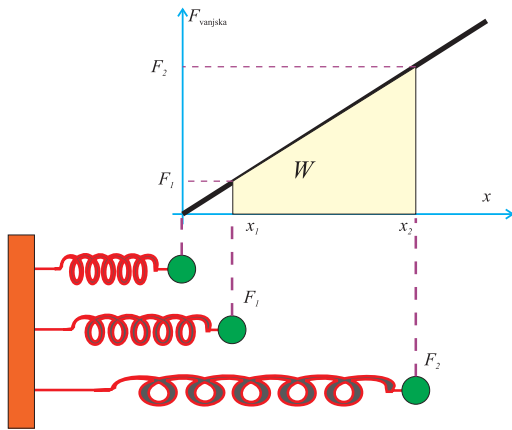
$$W_{\min} \leq W \leq W_{\max}.$$

Veći broj podintervala daje točniji rezultat. Kad je $\Delta l \rightarrow 0$ vrijedi:

$$W_{\min} \approx W_{\max} \approx W.$$

3.10.1 Rad elastične sile

Izračunajmo prvo rad kojeg vrši vanjska sila koja rasteže oprugu. Po 3. Newtonovom zakonu je ona $\vec{F}_{\text{vanjska}} = -\vec{F}_{\text{el}} = kx$. Graf je prikazan na slici 16. Vidimo da je površina ispod krivulje



Slika 16: Rad elastične sile

$$W_{\text{vanjska}} = \frac{F_1 + F_2}{2} l = \frac{kx_1 + kx_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (3.74)$$

Rad elastične sile razlikuje se samo u predznaku:

$$W_{\text{el}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (3.75)$$

Kad je $x_1 < x_2$, tj. opruga se rasteže, elastična sila daje negativni rad. Pravilo: *privlačna sila je negativna, a odbojna pozitivna.*

3.10.2 Konzervativne sile

Kad rad ne ovisi o putanji nego samo o početnoj i konačnoj točki, za silu se kaže da je *konzervativna*.

3.11 Potencijalna energija

Ova energija ovisi o međusobnom položaju tijela. Također se naziva *energijom konfiguracije*, ili *međusobnom energijom*.

Kod konzervativne sile, rad je jednak razlici dva člana koji su funkcije koordinata početka i kraja putanje. Dakle, rad je jednak promjeni potencijalne energije sistema interagirajućih čestica:

$$W = U_1 - U_2. \quad (3.76)$$

Vidimo da je *potencijalna energija elastične sile*

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2} kx^2. \quad (3.77)$$

Potencijalna energija gravitacijskog polja je

$$U_{\text{grav}} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (3.78)$$

Energija je negativna jer je gravitacijska sila uvijek privlačna. Kad se udaljenost povećava bez granica ($r \rightarrow \infty$), potencijalna energija ide u nulu, tj. ona raste na račun rada kojeg čini vanjska sila koja povećava međusobnu udaljenost između interagirajućih tijela.

Od posebnog je interesa gravitacijska potencijalna energija blizu površine Zemlje. Stavimo u jednadžbu (3.76) za energiju na površini $U_1 = 0$, a s $U = U_2$ označimo je na visini h , imamo

$$U = \Gamma \frac{mM}{R+h} - \Gamma \frac{m_1 m_2}{R} = \Gamma \frac{mMh}{R(R+h)}$$

Za male visine ($h \ll R$) je

$$U = mgh.$$

Ova se jednadžba zove *potencijalna energija tijela u gravitacijskom polju*. Valja zapaziti da se potencijalna energija može iskazati do na aditivnu konstantu, tj. energija $U' = U + konst$ dat će isti rad kao U :

$$W' = U'_1 - U'_2 = U_1 - U_2.$$

Taj se rezultat može iskazati kako slijedi: *nulti nivo potencijalne energije može se odabrati po volji*.

3.12 Zakon očuvanja energije u Newtonovoj mehanici

3.12.1 Mehanička energija i njeno očuvanje

Razmotrimo sistem tijela na koja djeluju samo konzervativne sile. *Fizička veličina E , jednaka sumi kinetičke i potencijalne energije se naziva ukupna mehanička energija sistema:*

$$E \stackrel{\text{def}}{=} K + U. \quad (3.79)$$

Pretpostavimo da je sistem zatvoren, odnosno da u njemu djeluju samo unutarnje sile. Tada imamo:

$$W = K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \rightarrow K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

dakle, suma kinetičke i potencijalne energije sistema je očuvana:

$$E = K + U = \text{konstanta}. \quad (3.80)$$

To je *zakon očuvanja energije* u Newtonovoj mehanici: *mehanička energija zatvorenog konzervativnog sistema je očuvana.*

3.12.2 Prva kosmička brzina

Izračunajmo brzinu koju mora dobiti tijelo da s površine Zemlje odleti u orbitu.

Oznake: v_o – brzina tijela u orbiti, v – brzina koju ima tijelo na površini Zemlje, r – polunjer orbite.

Na tijelo u kružnoj orbiti djeluje gravitacijska sila Zemlje koja mu daje centripetalnu, normalnu akceleraciju $a_n = v_o^2/r$, odnosno po Newtonovom zakonu:

$$\Gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_o^2}{r}. \quad (3.81)$$

Da bismo dobili traženu brzinu, koristimo zakon očuvanja energije:

$$E(\text{na površini}) = K_p + U_p = E(\text{u orbiti}) = K_o + U_o$$

ili

$$\frac{mv^2}{2} - \Gamma \frac{mM}{R} = \frac{mv_o^2}{2} - \Gamma \frac{mM}{r} \stackrel{(3.81)}{=} \Gamma \frac{mM}{2r} - \Gamma \frac{mM}{r} \rightarrow v = \sqrt{\Gamma M \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)}$$

Ukoliko je orbita blizu površine Zemlje, vrijedi $r \approx R$ pa je

$$v_1 = \sqrt{\Gamma M \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R} \right)} = \sqrt{\Gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{gR} = 7.91 \text{ km/s.}$$

Druga kosmička brzina (brzina bijega) je brzina koju tijelo treba dobiti da tijelo napusti gravitacijsko polje Zemlje, tj. da ode u beskonačnost, pa je za $r \rightarrow \infty$

$$v_2 = \sqrt{2\Gamma M/R} = v_1\sqrt{2} = 11.2 \text{ km/s.}$$

4 Teorija specijalne relativnosti

4.1 Brzina svjetlosti i zakon slaganja brzina

Sredinom 19. stoljeća brzina svjetlosti izmjerena je prilično precizno:

$$c = (2.9979250 \pm .1 \cdot 10^{-7}) \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

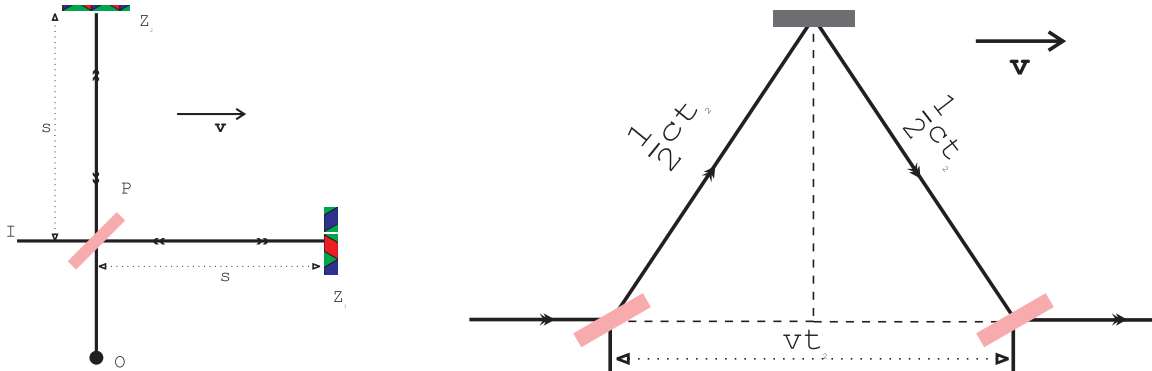
Prirodno je postaviti pitanje: na koji se referentni sustav odnosi dana brzina svjetlosti?

Iz klasičnog zakona slaganja brzina, brzina svjetlosti trebala bi biti različita u različitim referentnim sustavima. Prvi eksperiment koji mjeri brzinu u referentnim sustavima koji se gibaju napravio je 1881. godine **Albert A. Michelson** (1852.-1931.) . Kasnije su napravljeni i precizniji eksperimenti, ali svi su dali negativni rezultat: u svim inercijalnim sustavima brzina svjetlosti u vakuumu je ista.

4.2 Michelson-Morleyev eksperiment

Širenje valova svjetlosti opisuje se valnom jednadžbom. Brzina širenja valova u elastičnom sredstvu određena je osobinama sredstva. Pretpostavimo da se opažač giba brzinom v paralelno konopcu duž kojeg se poremećaj širi. Nitko neće sumnjati da se poremećaj, u odnosu na opažača koji se giba, širi brzinom $c' = c - v$. Prirodno je da se ova ideja proširi na valove svjetlosti. Kad su valovi svjetlosti prvi put ispitivani, pretpostavljeno je da prostor sadrži neku vrstu idealizirane elastične tvari nazvane *eter*. Budući da se Zemlja giba u odnosu na eter, brzina svjetlosti relativno na Zemlju mora biti različita u raznim smjerovima i u različitim godišnjim dobima, odnosno na različitim mjestima na kojima se Zemlja nalazi u svom gibanju oko Sunca.

Michelson-Morleyev eksperiment pokušaj je mjerenja tog efekta. U tom eksperimentu, slika 17, svjetlost



Slika 17: Michelson-Morleyev eksperiment. Svjetlost putuje od izvora I do poluposrebnog zrcala. Dio svjetlosti se reflektira, a dio prolazi kroz zrcalo. Te zrake interferiraju u točki O .

ide iz izvora I , do poluposrebnog zrcala. Dio svjetlosti prolazi, a dio se reflektira. Dvije zrake svjetlosti tako dobivene reflektiraju se od zrcala Z_1 i Z_2 i susreću u P ; konačno se opažaju u O . Aparat je fiksiran na Zemlji i giba se kroz eter brzinom v . Pretpostavit ćemo da je smjer gibanja paralelan sa zrakom svjetlosti.

Slika 17(a) pokazuje kako eksperiment izgleda opažaču na Zemlji. Za opažača koji je fiksiran u prostoru, tj. stacionaran u odnosu na eter, aparat prijeđe udaljenost vt_2 u vremenu t_2 koje je potrebno svjetlosti da ide iz P u Z_2 i natrag, slika 17(b). Izračunajmo t_2 :

$$\left(\frac{1}{2} ct_2\right)^2 = s^2 + \left(\frac{1}{2} vt_2\right)^2 \rightarrow t_2 = \frac{2s}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (4.1)$$

Zraka svjetlosti koja ide paralelno s v ima brzinu $c - v$ relativno na aparat od P do Z_1 , odnosno $c + v$ od Z_1 do P . Ukupno je vrijeme

$$t_1 = \frac{s}{c-v} + \frac{s}{c+v} = \frac{2s}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}. \quad (4.2)$$

Tako su te dvije zrake u točki O izvan faze za

$$\omega(t_1 - t_2) \approx \omega \frac{2s}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{\omega s v^2}{c^3}. \quad (4.3)$$

Dakle, te dvije zrake stvaraju interferenciju u O koja se može optički opaziti. Ako se aparat sporo rotira tako da PZ_2 postane koincidentno s v , između dvije zrake će biti pomak u fazi $2\omega s v^2/c^2$. Uzevši konkretne podatke, pokazuje se da je efekt dovoljno velik za opažanje. Eksperiment je izvršen u razna vremena tijekom godine da se otkloni mogućnost da brzina Zemlje u odnosu na eter bude slučajno nula.

Michelson-Morleyev eksperiment dao je negativan rezultat. Einstein je zaključio da objašnjenje ovog eksperimenta može biti pretpostavka da je brzina svjetlosti u vakuumu u svim inercijalnim sustavima ista.

Dakle, brzina svjetlosti *ne* zadovoljava Galilejev zakon transformacije brzine.

4.3 Postulati specijalne teorije relativnosti

Princip relativnosti Svi inercijalni sustavi su ravnopravni; ne samo mehaničke, već i sve ostale pojave u prirodi odvijaju se jednako u svim inercijalnim sustavima

Princip invarijantnosti brzine svjetlosti Brzina svjetlosti u vakuumu ista je i jednaka c u svim inercijalnim sustavima.

4.4 Lorentzove transformacije

Ako dva opažачa u inercijalnim sustavima koja se relativno gibaju opažaju isti događaj u terminima njihovih koordinata, postavlja se pitanje u kakvoj su relaciji te koordinate. Razmotrimo da inercijalne sustava S i S' gdje se koordinatne osi paralelne, a ishodište od S' giba se brzinom $\vec{v} = v\vec{e}_z$ prema S . Dana točka P može se prikazati u terminima $\vec{r} = (x, y, z)$ i t ili $\vec{r}' = (x', y', z')$ i t' . Za Newtonove zakone moraju vrijediti Galilejeve transformacije

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t. \quad (4.4)$$

Iako se relacije čien očiglednima, one nisu konzistentne s principima teorije relativnosti. Razmotrimo širenje svjetlosnog bljeska koji se desio u $t = t' = 0$, kad su ishodišta sustava bila koincidentna. Opažać u S vidi propagiranje svjetlosti kao sfernu ljusku polumjera ct gdje je c brzina svjetlosti. Propagiranje svjetlosnog pulsa u S zadovoljava jednadžbu

$$x^2 + r^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (4.5)$$

Opažać u S' također vidi svjetlosni puls koji se širi brzinom c što zahtjeva princip specijalne relativnosti.:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (4.6)$$

Lako je vidjeti da to nije u skladu s Galilejevim transformacijama: nakon uvrštenja (4.4) u (4.5) dobivamo

$$x'^2 + y'^2 + (z' + vt')^2 = c^2 t'^2 \quad (4.7)$$

što nije isto kao (4.6); Galilejeve transformacije su nekonzistentne s principom specijalne relativnosti.

Sad ćemo naći transformacije koordinata koje povezuju (4.5) i (4.6). Prvo, promatrat ćemo samo linearne transformacije koje jedino osiguravaju da nemamo specijalnih točaka u prostoru i vremenu tj. svaka točka može biti ishodište koordinatnog sustava.. Razmotrimo transformacije oblika:

$$x = x', \quad y = y' \quad (4.8a)$$

$$z = \gamma(z' + at') \quad (4.8b)$$

$$t = \beta(t' + bz') \quad (4.8c)$$

gdje su γ , β , a , b još nepoznate konstante. Za male relativne brzine je $\gamma \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 1$, $a \rightarrow v$ i $b \rightarrow 0$ da bismo reproducirali Galilejeve transformacije. Promotrimo ishodište od S kako ga vidi opažać u ishodištu od S' . Opažać vidi S da se giba nalijevo brzinom v , tj. $z' = -vt'$, pa uvršimo to i $z = 0$ u (4.8b) :

$$a = v. \quad (4.9)$$

Stavimo ove transformacije u (4.5): Da bi to bilo konsistentno s (4.6), mora vrijediti

$$x'^2 + y'^2 + \gamma^2(z'^2 + 2vz't' + v^2t'^2) = c^2\beta^2(t'^2 + 2bt'z' + b^2z'^2), \quad (4.10)$$

$$\gamma^2 - \beta^2b^2c^2 = 1 \quad (4.11a)$$

$$\gamma^2v = c^2b\beta^2, \quad (4.11b)$$

$$\beta^2 - \gamma^2v^2/c^2 = 1. \quad (4.11c)$$

Iz prve dvije jednadžbe imamo

$$\gamma^2 - \frac{\gamma^4}{\beta^2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) = 1. \quad (4.12)$$

Ovo zajedno sa zadnjom jednadžbom daje

$$\beta^2 = \gamma^2$$

pa s tim u (4.11) i dobivamo

$$b = \frac{v}{c^2}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}.$$

Kako je $\gamma(0) = 1 > 0$ imamo

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.13)$$

Lako dobijemo ostale konstante, pa su *Lorentzove transformacije*

$$x = x', \quad y = y' \quad (4.14a)$$

$$z = \gamma(z' + vt') \quad (4.14b)$$

$$t = \gamma(t' + vz'/c^2) \quad (4.14c)$$

gdje je

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.14d)$$

Inverzne su transformacije

$$x' = x, \quad y' = y \quad (4.15a)$$

$$z' = \gamma(z - vt) \quad (4.15b)$$

$$t' = \gamma(t - vz/c^2) \quad (4.15c)$$

4.5 Posljedice Lorentzovih transformacija

Lorentzove transformacije sadrže sve kinematičke informacije specijalne relativnosti. Svaka pojava koja se dešava s tijelima naziva se *događaj*.

4.5.1 Dilatacija vremena

Neka sat miruje u sustavu S' ($\vec{r}_2 = \vec{r}_1$). Interval između dva događaja u S' je $(\Delta t)' = t'_2 - t'_1$. Ovaj interval, koji se mjeri u sustavu vezanom za tijelo naziva se *vlastito vrijeme* i obično se označava s τ . U sustavu S ta dva događaja su udaljena za

$$\Delta t = \gamma \left[t'_2 - t'_1 - \frac{v}{c^2} (z'_2 - z'_1) \right] = \gamma \left[(\Delta t)' + \frac{v}{c^2} \cdot 0 \right] = \gamma(\Delta t)'.$$

Kako je $\gamma > 1$, u necrtanom sustavu vremenski interval Δt je veći nego u S' , tj. sat koji se giba brzinom v će kucati sporije nego kad miruje.

Kad je sat fiksiran u S , interval u S' će biti

$$\Delta t' = \gamma\Delta t.$$

Opet, sat koji se giba je sporiji za faktor γ

4.5.2 Paradoks blizanaca

Intrigirajuća posljedica vremenske dilatacije je tzv. *paradoks blizanaca*. Razmotrimo eksperiment koji uključuje blizance O i S. Kad su bili stari 20 godina, S se uputio na planet X udaljen 20 godina svjetlosti od Zemlje. Njegov svemirski brod putuje brzinom $0.95c$ relativno na inercijalni sustav njegovog brata. Nakon povratka na Zemlju S je iznenađen jer je O ostario za 42 godine i sad ima 62 godine. S, s druge strane, ostario je samo za 13 godina.

Sad se postavlja pitanje, koji je blizanac putovao i koji je stvarno mlađi kao rezultat takvog eksperimenta? Iz O referentnog sustava, njegov brat je putovao velikom brzinom i vratio se mlađi od njega. Ali u S sustavu, on je mirovao dok je O i Zemlja putovala od njega i vratila se k njemu. To vodi do kontradikcije zbog evidentne simetrije opažaća.

Ali, problem nije sasvim simetričan. Prisjetimo se da specijalna relativnost opisuje opažaće u inercijalnim sustavima. S, svemirski putnik, mora osjetiti mnoga ubrzanja zbog puta. Kao rezultat, njegova brzina nije uvijek jednolika, i on nije u inercijalnom sustavu. Dakle, nema paradoksa, samo O, koji je uvijek u jednom inercijalnom sustavu, može učiniti korektno predviđanje temeljeno na specijalnoj relativnosti.

4.5.3 Kontrakcija dužina

Drugi kinematički efekt je opaženo skraćivanje tijela koje se giba. Neka štap *vlastite duljine* L_0 leži (miruje) paralelno s z' -osi u S' sustavu. Kolika je duljina štapa mjerena u s sustavu? Pod mjerenjem mislimo da opažać određuje razliku z koordinata krajeva štapa u fiksno vrijeme t . Iz Lorentzovih transformacija imamo

$$z'_2 - z'_1 \equiv L_0 = \gamma(z_2 - z_1 - v(t_2 - t_1)) = \gamma(z_1 - z_2) = \gamma L.$$

Duljina štapa $L = z_2 - z_1$ koju vidi opažać u necrtanom sustavu je dakle

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (4.16)$$

Dakle, štap u gibanju se čini kraćim. Zapazite da u svim sustavima koji se gibaju različitim brzinama u odnosu na sustav gdje štap miruje, duljina štapa varira. Iz toga je jasno da relativistička promjena u duljini nije zbog deformacije štapa ili sličnog procesa.

Povijesna napomena: Kontrakciju duljina prvi je predložio **H. A. Lorentz** više od deset godina prije teorije relativnosti kako bi objasnio Michelson–Morleyev eksperiment. On je sugerirao da ako se duljina aparata duž smjera vjetra etera skraćuje za faktor γ , tada će vremena t_1 i t_2 biti jednaka i neće biti razlike u fazi.

4.5.4 Vremenski interval između uzroka i posljedice

Mnogi su događaji u prirodi povezani onim što nazivamo *uzrokom i posljedicom–efektom*. Npr. prije nego metak pogodi metu, nužno je ispaliti metak. Ovdje je ispaljivanje uzrok a pogađanje mete posljedica.

Osobine ove vrste odnosa su sljedeće:

- i. Prvo se događa uzrok, a onda posljedica.
- ii. Ako eliminiramo događaj koji je uzrok, efekt se neće dogoditi.

Ovaj slijed događanja ne smije se izmjeniti ni u kojem referentnom sustavu.

Pretpostavimo da u sustavu vezanom za Zemlju pištolj opali u trenutku t_1 u točki s koordinatom z_1 , a tada metak pogodi metu u točki z_2 u trenutku t_2 . Brzina metka u tom referentnom sustavu je

$$u = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}.$$

Nađimo sad vremenski interval u sustavu koji se giba duž z -osi brzinom v :

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(z_2 - z_1) \right] = \gamma(t_2 - t_1) \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right). \quad (4.17)$$

Ako su brzine metka u i novog sustava v manje nego brzina svjetlosti u vakuumu onda je $1 - uv/c^2 > 0$, pa vremenski interval $t'_2 - t'_1$ ima isti predznak kao $t_2 - t_1$. Naravno, $t_2 > t_1$ pa je i u bilo kojem sustavu koji se giba brzinom manjom od c $t'_2 > t'_1$. Kad bi $v > c$ ili $u > c$ moglo bi se desiti da je $t'_1 > t'_2$ tj. u tom bi sustavu posljedica mogla prethoditi uzroku. Kako osnovni princip to zabranjuje, vidimo da su brzine gibanja tijela ili širenja informacija veće od brzine svjetlosti u vakuumu nemoguće.

4.5.5 Slaganje brzina

Iz Lorentzovih transformacija imamo:

$$\Delta x = \Delta x', \quad \Delta y = \Delta y', \quad (4.18a)$$

$$\Delta z = \gamma(\Delta z' + v\Delta t'), \quad (4.18b)$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta z'\right). \quad (4.18c)$$

Brzine duž osi z su

$$u_z \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad u'_z \equiv \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \quad (4.19)$$

pa su brzine

$$u_z = \frac{v + u'_z}{1 + vu'_z/c^2}, \quad (4.20a)$$

$$u_x = \frac{u'_x}{\gamma(v)(1 + vu'_z/c^2)}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(v)(1 + vu'_z/c^2)} \rightarrow \vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}'_\perp}{\gamma(v)(1 + vu'_z/c^2)}. \quad (4.20b)$$

4.6 Relacija između relativističke i Newtonove mehanike

Newtonova mehanika i, specijalno, Galilejeve transformacije zasnivaju se na pretpostavci da je vrijeme identično u svim sustavima. Kako se vidi iz Lorentzovih transformacija, to je netočno. Kako ipak to daje *ispravne* odgovore? Razlog je naravno, da se tijela gibaju brzinama mnogo manjim od brzine svjetlosti u vakuumu. U tim se slučajevima relativističke jednadžbe reduciraju na Newtonove s dovoljnom točnošću za sve praktične uporabe.

Na primjer za tijelo koje se giba brzinom od $v = 10$ km/s. Omjer

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-9}. \rightarrow 1 - \gamma \approx 2.22 \cdot 10^{-9}$$

tj. da se razlikuje od jedinice, mora se mjeriti s točnošću od 9 značajnih znamenki. Tako, ako uzmemo da je $\gamma = 1$ dobivamo Galilejeve transformacije:

$$z' = \gamma(x - vt) \approx x - vt, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \approx t.$$

Tako smo stigli do važnog zaključka: *teorija relativnosti uključuje Newtonovu mehaniku kao granični slučaj mehanike u kojoj je brzina bitno manja od brzine svjetlosti u vakuumu.*

Ovaj primjer demonstrira razvoj znanosti. Znanstvena teorija opisuje određeni opseg pojava s određenim stupnjem točnosti. Kako se znanost dalje razvija, uključuje veći opseg pojava.

Na određenom stupnju razvoja, stara teorija više ne može objasniti novootkrivene pojave, teorija je u neskladu s novim činjenicama. Tada se razvija nova teorija često zasnovana na potpuno novim principima. Ali nova teorija ne odbacuje staru u potpunosti, ona uključuje staru kao granični slučaj za pojave koje su prije bile zadovoljavajuće opisane. Taj poduhvat se u znanosti naziva *principom korespondencije*.

4.6.1 Masa, impuls i sila u teoriji relativnosti

Impuls mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

- linearni moment izoliranog sustava mora biti očuvan u svim sudarima
- relativistička vrijednost linearnog momenta \vec{p} čestice mora se približavati klasičnoj vrijednosti $m\vec{v}$ kad se \vec{v} približava nuli.

Korektna relativistička jednačba za impuls koja zadovoljava ove uvjete je

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}. \quad (4.21)$$

Relativistička sila koja djeluje na česticu je po definiciji

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (4.22)$$

Akceleracija čestice na koju djeluje konstantna sila je $a \propto (1 - v^2/c^2)^{3/2}$. Iz te proporcionalnosti, vidimo da kad se brzina čestice približava c , akceleracija se približava nuli. Dakle, nemoguće je ubrzati česticu na brzinu $v \geq c$.

4.6.2 Relativistička masa

Neki stariji članci, knjige o relativnosti koriste model u kojem se masa čestice povećava s brzinom. Takva se masa obično naziva ‘relativistička masa’. Moderni je pogled da se masa shvaća kao *invarijantna*, neovisna o brzini. Masa objekta u svim sustavima je masa koju mjeri opažatelj koji miruje u odnosu na objekt.

4.6.3 Relativistička energija

Neka se čestica giba duž x -osi. Sila uzrokuje promjenu impulsa u skladu s formulom (4.22). Rad koju čini sila na česticu je

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\varphi}{dt} dx. \quad (4.23)$$

Izračunajmo derivaciju impulsa:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \frac{dv}{dt}.$$

pa uvrstimo u gornji izraz za rad:

$$W = \int_0^t \frac{m}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \frac{dv}{dt} dt = m \int_0^v \frac{v}{(1 - v^2/c^2)} du.$$

Taj je integral jednak

$$W = m\gamma c^2 - m, c^2. \quad (4.24)$$

Ovaj je rad jednak kintičkoj energiji:

$$K = m\gamma c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \quad (4.25)$$

Razvijemo li ovo u red (kad je $v \ll c$ imamo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

pa je

$$K \approx \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{za } v/c \ll 1$$

Konstantni član mc^2 u jednadžbi (4.25), koji je neovisan o brzini čestice, naziva se *energija mirovanja* čestice

$$\boxed{E_0 = mc^2}. \quad (4.26)$$

Član $m\gamma c^2$ koji ovisi o brzini čestice, je suma kinetičke energije i energije mirovanja. Definiramo ukupnu energiju

$$E \equiv K + mc^2 = m\gamma c^2. \quad (4.27)$$

Ova jednadžba pokazuje da je *masa oblik energije*.

Kvadriramo izraze za energiju $E = m\gamma c^2$ i impuls $p = m\gamma v$ i oduzmemo ih, pa dobivamo

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2. \quad (4.28)$$

Literatura

- [1] Yavorski - Pinski: fundamentals
- [2] Serway, Jevett: Physics for the scientist, www.pse6.com
- [3] Feynman Lectures on Physics vol 1.