

# Fizika 1 za Informatiku

ZK

2011-05-10 13:02:34

## Sadržaj

<b>I</b>	<b>Optika</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Priroda svjetlosti</b>	<b>3</b>
1.1	Mjerenje brzine svjetlosti . . . . .	3
1.2	Geometrijska optika . . . . .	3
1.2.1	Fermatov princip . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Stvaranje slike</b>	<b>6</b>
2.1	Ravno zrcalo . . . . .	6
2.1.1	Sferna zrcala . . . . .	7
2.1.2	Slike stvorene lomom (refrakcijom) . . . . .	9
2.1.3	Ravna prozirna ploha . . . . .	10
2.1.4	Tanke leće . . . . .	11
2.1.5	Kombinacija tankih leća . . . . .	14
2.1.6	Oko . . . . .	14
2.1.7	Jednostavno povećalo . . . . .	15
2.1.8	Mikroskop . . . . .	16
2.1.9	Teleskop . . . . .	17

# Dio I

## Optika

### 1 Priroda svjetlosti

Prije 19. stoljeća, svjetlost se zamišljala kao snop čestica emitiranih s objekta kojeg promatramo ili koje se zrače iz oka promatrača. Newton, glavni arhitekt čestične teorije svjetlosti, mislio je da se čestice svjetlosti emitiraju iz izvora svjetlosti te stimuliraju osjet vida ulaskom u oko. S tom idejom bilo je moguće objasniti refleksiju i lom (refrakciju) svjetlosti.

Godine 1678. holandski fizičar i astronom **Christian Huygens** pokazao je da valna teorija može također objasniti refleksiju i lom svjetlosti.

Godine 1801. **Thomas Young** (1773.–1829.) jasno je demonstrirao valnu prirodu svjetlosti, pokazavši interferenciju svjetlosti. Takvo se ponašanje nije moglo objasniti čestičnom prirodom. Daljnji razvoj valnoj prirodi za vrijeme 19. stoljeća došao je od Maxwella, koji je 1873. konstatirao da je svjetlost oblik visoko-frekventnih EM valova, a Hertz je potvrdio Maxwellovu teoriju 1887. stvaranjem i detektiranjem EM valova.

Ipak neka se ponašanja nisu mogla objasniti valnim modelom. Najupečatljiviji je primjer fotoefekt čije je objašnjenje dao Einstein 1905. korištenjem kvantizacije kojeg je uveo Max Plank 1900. godine. Ovaj model pretpostavlja da je energija čestica svjetlosti, nazvanih *fotonima*, kvantizirana. Po Einsteinovoj teoriji energija fotona proporcionalna je frekvenciji elektromagnetnog vala:

$$E = h\nu, \quad (1.1)$$

gdje je konstanta proporcionalnosti  $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$  Js planckova konstanta.

Tako svjetlost ima *dualnu prirodu*: **svjetlost pokazuje valne karakteristike u nekim situacijama, a u drugima čestične karakteristike**. Nekad se svjetlost ponaša kao val, nekad kao čestica.

#### 1.1 Mjerenje brzine svjetlosti

Svjetlost putuje tako velikom brzinom ( $c = 3 \cdot 10^8$  m/s) da su rani pokušaji mjerenja bili neuspješni. Galileo je pokušao mjeriti brzinu svjetlosti pomoću dva opažača udaljena oko 10 km, što je u tom vremenu bilo nemoguće izmjeriti, jer je vrijeme koje je potrebno svjetlosti da prijeđe taj put prekratko, mnogo kraće nego vrijeme reakcije opažača.

Godine 1675. danski astronom **Ole Roemer** (1644.–1710.) prvi je uspješno odredio brzinu svjetlosti. Roemerova tehnika uključivala je promatranje *Io*-a, Jupiterova mjeseca. Izmjerena je brzina bila  $2.3 \cdot 10^8$  m/s. Pokus je bio važan, jer je pokazao da svjetlost ima konačnu brzinu.

Prvu uspješnu metodu mjerenja brzine svjetlosti korištenjem zemaljskih tehnika razvio je 1849. francuski fizičar **Armand H. L. Fizeu** (1819.–1896.). Fizeu je dobio vrijednost od  $3.1 \cdot 10^8$  m/s. Slična mjerenja dovela su do sada prihvaćene vrijednosti od  $2.9979 \cdot 10^8$  m/s.

#### 1.2 Geometrijska optika

Polje **geometrijske optike** uključuje proučavanje propagacije svjetlosti pod pretpostavkom **aproksimacije zraka**. U toj aproksimaciji, zrake se gibaju po pravcu u homogenom sredstvu.

### 1.2.1 Fermatov princip

Pierre de Fermat (1601.–1665.) razvio je opći princip koji se može primjeniti za određivanje putanje svjetlosne zrake od jedne točke do druge.

**Teorem 1.1. Fermatov princip** kaže da kad svjetlost putuje između dvije točke, prava putanja je ona po kojoj svjetlosti treba najkraće vrijeme.

Očita je posljedica Fermatova principa da svjetlost kroz homogeno sredstvo putuje po ravnoj liniji, jer je to najkraća udaljenost između dvije točke, a brzina je svugdje jednaka, pa je time za to potrebno i najkraće vrijeme.

**Refleksija svjetlosti** Kad svjetlosna zraka putujući jednim sredstvom dolazi na granicu s drugim sredstvom, dio zraka se reflektira. Svjetlost polazi iz izvora u točki  $I$ , i nakon refleksije dolazi do točke  $O$ , slika 1. Vrijeme potrebno da prevali putove  $s_1$  i  $s_2$  je

$$t = \frac{s_1}{c} + \frac{s_2}{c}.$$

Putovi su

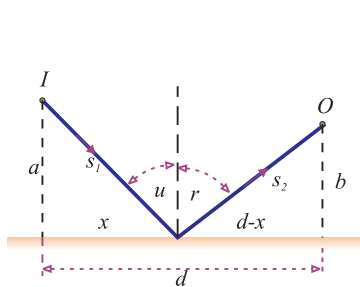
$$s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad s_2 = \sqrt{(d-x)^2 + b^2},$$

pa je vrijeme

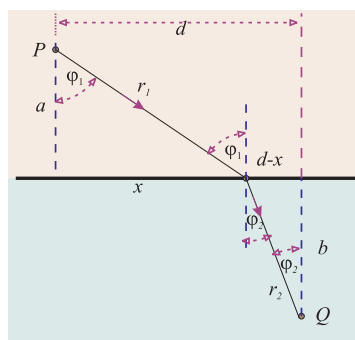
$$t = \frac{1}{c} \left( \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(d-x)^2 + b^2} \right).$$

Ekstrem nalazimo izjednačavanjem derivacije funkcije s nulom

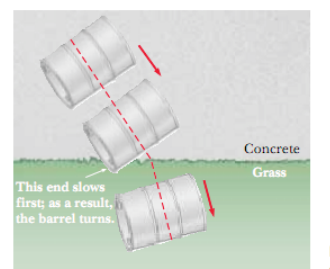
$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}.$$



Slika 1: Geometrija za izvod zakona refleksije iz Fermatova principa.



Slika 2: Geometrija za izvod Snellovog zakona loma iz Fermatovog principa.



Slika 3: Cilindri se kotrljaju s betona na travu.

Iz slike 1 vidi se da je

$$\sin u = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \sin r = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}},$$

pa gornja formula daje

$$\sin u - \sin r = 0 \rightarrow u = r,$$

odnosno **zakon refleksije** glasi **kut refleksije jednak je kutu upada**.

**Lom svjetlosti** Kad zraka svjetlosti prolazeći prozirnim sredstvom dolazi na granicu s drugim prozirnim sredstvom, dio se energije odbija a dio ulazi u drugo sredstvo. Zraka koja ulazi u drugo sredstvo se **lomi**. Kut loma ovisi o osobinama sredstava i kutu upada po relaciji

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{konstanta} \quad (1.2)$$

gdje su  $v_{1,2}$  brzine u prvom odnosno drugom sredstvu. Put zrake kroz refraktirajuću plohu je reverzibilan.

**Indeks loma** Općenito je brzina svjetlosti u bilo kojem materijalu *manja* od brzine u vakuumu. Definiramo **indeks loma**  $n$  omjerom

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{brzina svjetlosti u vakuumu}}{\text{brzina svjetlosti u sredstvu}} = \frac{c}{v}. \quad (1.3)$$

Prelaskom svjetlosti iz jednog sredstva u drugo, frekvencija se ne mijenja, već se mijenja valna duljina. Ako s  $\lambda_0$  označimo valnu duljinu vala u vakuumu, onda je

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{v}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Kako je  $n > 1$ , valna duljina u sredstvu je kraća nego u vakuumu.

Sad možemo jednadžbu (1.2) izraziti u obliku

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \quad (1.4)$$

kojeg je eksperimentalno otkrio Willebrord Snell (1591.–1627.) pa je poznat kao **Snellov zakon refrakcije (loma)**.

Mehanička analogija loma svjetlosti prikazana je na slici 3. Kad lijevi kraj kotrljajućeg cilindra stigne na travu uspori, a desni se nastavlja gibati originalnom brzinom. Razlika u brzinama uzrokuje zakretanje i promjenu smjera gibanja.

Svjetlost iz točke  $P$  u sredstvu s indeksom loma  $n_1$  dolazi u točku  $Q$  u sredstvu s indeksom loma  $n_2$ . Brzine svjetlosti u sredstvima su  $v_i = c/n_i$ ,  $i = 1, 2$ . Točka  $P$  je za  $a$ , a  $Q$  za  $b$  udaljena od granice. Vrijeme za koje svjetlost stigne u  $Q$  je

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c/n_2}. \quad (1.5)$$

Izjednačimo derivaciju po  $x$  s nulom

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{n_1}{c} \frac{d}{dx} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \frac{d}{dx} \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \\ &= \frac{n_1 x}{c\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Iz slike 2

$$\sin \varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

pa gornja jednadžba daje *Snellov zakon loma*

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2.$$

## 2 Stvaranje slike

### 2.1 Ravno zrcalo

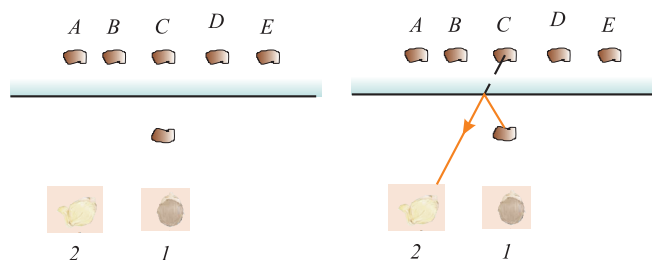
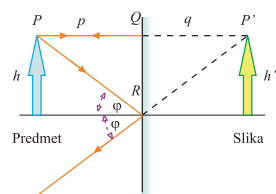
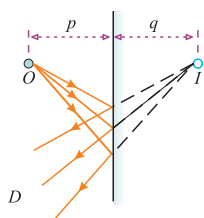
Razmotrimo najjednostavnije zrcalo – ravno zrcalo. Neka je predmet postavljen na udaljenosti  $p$  ispred zrcala. Nakon refleksije zrake divergiraju. Crtkane linije su produžetak divergiranih zraka natrag u točku presjeka  $I$ . Divergentne zrake se promatraču čine kao da dolaze iz točke  $I$  iza zrcala. Točka  $I$  zove se **slika** predmeta u  $O$ . Uvijek lociramo slike produžujući zrake u točku u kojoj se sijeku. Slika je na udaljenosti  $q$  iza zrcala, jednaka udaljenosti predmeta od zrcala,  $|q| = |p|$ .

Lako se vidi da je visina predmeta  $h$  jednaka visini slike  $h'$ . Definiramo **povećanje**  $M$  po relaciji

$$M \equiv \frac{\text{visina slike}}{\text{visina predmeta}} = \frac{h'}{h}. \quad (2.1)$$

Za ravno zrcalo je uvijek  $M = 1$ .

Konačno, zapazimo da ravno zrcalo uvijek stvara sliku koja zamjenjuje lijevo–desno.



Slika 4: Slika dobivena refleksijom na ravnom zrcalu. Slika je smještena na zrcalo na udaljenosti  $q$  koja je jednaka udaljenosti predmeta od zrcala.

Slika 5: Geometrijska konstrukcija slike na ravnom zrcalu. Trokuti  $PQR$  i  $P'QR$  su sukladni, pa je  $|p| = |q|$ , odnosno  $h = h'$ .

Slika 6: Uz kviz 2.1. Gdje će opažači vidjeti sliku kamena? Rješenje uz kviz 2.1. Slika kamena je uvijek  $C$ !

Slika je **realna** ili **virtualna**. **Realna slika se formira kad se zrake sijeku u točki slike; virtualna slika se formira kad zrake ne prolaze kroz točku slike, nego se čini da divergiraju iz te točke.** Slika ravnog zrcala je uvijek virtualna. Realna slika se može uhvatiti na zaslon, a virtualna ne može.

**Kviz 2.1.** Gdje će opažači sa slike 6 vidjeti sliku kamena?

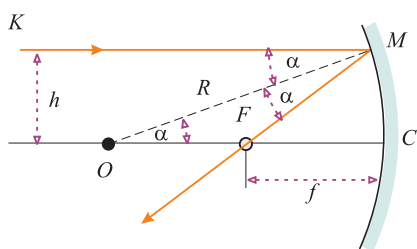
*Rješenje:* Obje slike su u  $C$ . Zraka koja ide od kamena do promatrača 2 izgleda kao na slici 7

**Kviz 2.2.** Ako stojite na 2 m od zrcala, a na zrcalu su mrlje vode, je li moguće vidjeti mrlje i vašu sliku istovremeno u fokusu?

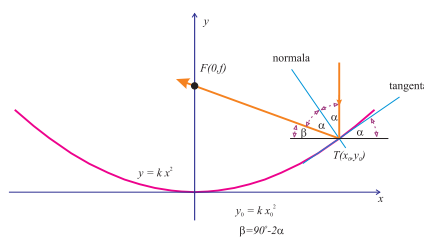
*Rješenje:* Nije. Mrlje vode su na 2 m od vas a vaša slika 4 m. Ne možete fokusirati vaše oči istovremeno na obje slike.

## 2.1.1 Sferna zrcala

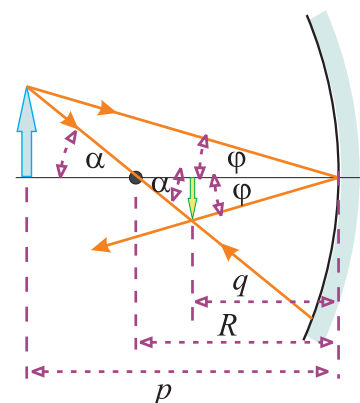
**Sferno zrcalo** ima oblik sfere. Zrcalo na kojem se zrake reflektiraju s unutarnje, konkavne strane, zove se **konkavno zrcalo**. Zrcalo ima polumjer zakrivljenosti  $R$ , s centrom u  $C$ . Središte sfernog dijela je točka  $V$ , a linija koja prolazi kroz  $C$  i  $V$  je **optička os** zrcala.



Slika 8:



Slika 9: Fokus kod paraboličnog zrcala.



Slika 10: Uz izvod jednadžbe zrcala.

Neka snop zraka ide paralelno glavnoj osi. Iskustvo kaže da će one konvergirati točki  $F$ , žarištu (fokusu). Nađimo žarišnu daljinu  $\overline{CF} = f$ .

Normala u točki  $M$  na koju zraka koja prolazi kroz  $K$  (slika 8) udara u zrcalo je polumjer  $\overline{OM} = R$ . Kutovi upada i refleksije su jednaki:

$$\angle KMO = \angle OMF = \alpha.$$

Taj kut nalazimo i u

$$\angle FOM = \angle KMO = \alpha$$

jer su to izmjenični kutovi na paralelnim pravcima. Dakle, trokut  $OFM$  je jednakokratan, i vrijedi  $\overline{OF} = \frac{R}{2} \cos \alpha$ . Dakle, žarišna daljina je

$$f = \overline{CF} = R - \frac{R}{2 \cos \alpha} = \frac{R}{2} \left( 2 - \frac{1}{\cos \alpha} \right).$$

Kako je  $\sin \alpha = h/R$ , dobivamo

$$f = \frac{R}{2} \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - h^2/R^2}} \right). \quad (2.2)$$

Kako je vidljivo, sferno zrcalo pati od sferne aberacije: žarišna daljina je različita za zrake koje dolaze iz različitih udaljenosti od optičke osi.

Za *paraksijalne zrake* ( $h \ll R$ ), sve zrake konvergiraju u jednu točku, i žarišna daljina za njih je

$$f = \frac{R}{2}. \quad (2.3)$$

**Parabolično zrcalo** ima oblik paraboloida. Za razliku od sfernog zrcala, ono ne pati od aberacije. Pokažimo da se sve zrake paralelne optičkoj osi sijeku u jednoj točki. Postavimo zrcalo u koordinatni

sustav, tako da jednadžba zrcala u  $xy$ -ravnini glasi  $y = kx^2$ , slika 9. Pogledajmo kako se reflektira zraka paralelna optičkoj osi, koja se nalazi na  $y$  osi. Jednadžba zrake je  $x = x_0$  i na zrcalo pada u točki  $T(x_0, y_0 = kx_0^2)$ . Koeficijent smjera tangente je tangens kuta tangente prema horizontali i iznosi:

$$y'(x_0) = 2kx_0 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Kut upada mjerimo prema normalni, i on je isto  $\alpha$  (okomiti pravci). Kako je kut refleksije jednak kutu upada zrake, to reflektirana zraka izlazi pod kutom  $2\alpha$  prema normalni. Kut prema horizontali je  $\frac{1}{2}\pi + 2\alpha$ , pa je koeficijent smjera reflektirane zrake

$$\begin{aligned} k_r &= \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) = -\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \\ &= \frac{4k^2 x_0^2 - 1}{4kx_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Jednadžba reflektirane zrake je jednadžba pravca kroz točku  $T$  s koeficijentom smjera  $k_r$ :

$$y - kx_0^2 = \frac{4k^2 x_0^2 - 1}{4kx_0} (x - x_0).$$

Sjecište zraka će zbog simetrije svakako biti na optičkoj osi,  $x = 0$ , pa je

$$y(x = 0) \equiv f = \frac{1}{4k} - kx_0^2 + kx_0^2 = \frac{1}{4k}. \quad (2.5)$$

Kako udaljenost fokusa od tjemena parabole,  $f$ , ne ovisi o  $x_0$  to je za sve pravce paralelne optičkoj osi jednak, odnosno sve se paralelne zrake sijeku u  $F(0, 1/4k)$ .

Slika se kod sfernog konkavnog zrcala nalazi na sljedeći način. Ovdje ćemo razmatrati samo **paraksijalne zrake** – zrake koje tvore mali kut s optičkom osi, i putujući od predmeta do slike nisu daleko od optičke osi.

Da bismo izračunali udaljenost slike  $q$  potrebno je znati udaljenost predmeta  $p$ , polumjer zakrivljenosti zrcal  $R$ . Po konvenciji udaljenosti se mjere od tjemena zrcala ( $V$ ), slika 10. Jedna od zraka putuje od predmeta kroz centar zakrivljenosti zrcala  $C$ . Ona upada okomito na zrcalo, pa se reflektira u samu sebe. Druga zraka udara u zrcalo u tjemenu i odbija se pod istim kutom pod kojim je upala u odnosu na optičku os, samo s druge strane. Slika predmeta se nalazi na mjestu gdje se ove dvije reflektirane zrake sijeku. Tu se sijeku i sve ostale reflektirane zrake koje putuju od predmeta. Karakteristične zrake su i one koje su paralelne s optičkom osi – one, kao što smo već izračunali, prolaze nakon refleksije kroz žarište  $F$  na  $R/2$  od tjemena na optičkoj osi (za paraksijalne zrake). Kako vrijedi inverzija, zraka koja prolazi kroz žarište, odbija se paralelno s optičkom osi.

Iz slike 10 vidimo da je  $\operatorname{tg} \varphi = h/p = -h'/p$ . Negativni predznak dolazi, jer je slika obrnuta, pa je  $h'$  negativan. Uvećanje slike dano je s

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}. \quad (2.6)$$

Zapažamo da iz trokuta koji sadrže kut  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{p - R} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{h'}{R - q}$$

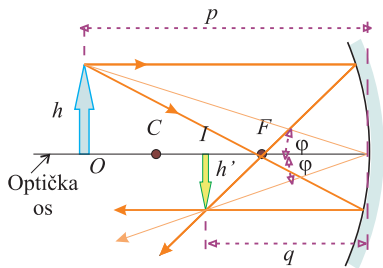
odakle nalazimo da je

$$\frac{h'}{h} = -\frac{R - q}{p - R}. \quad (2.7)$$

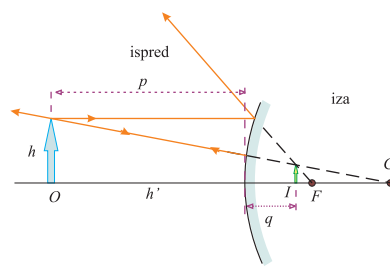
Usporedba Eq. (2.6) i Eq. (2.7) daje **jednadžbu zrcala**

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \approx \frac{1}{f}} \quad (2.8)$$

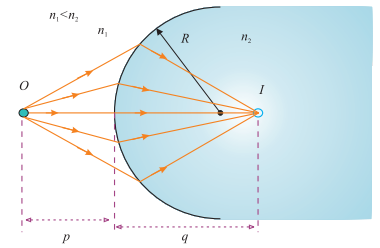
gdje je  $f = R/2$  žarišna daljina paraksijalnih zraka.



Slika 11: Slika koju stvara konkavno sferno zrcalo kad se predmet  $O$  nalazi izvan centra zakrivljenosti  $C$ .



Slika 12: Stvaranje slike kod sfernog konveksnog zrcala. Slika realnog predmeta uvijek je virtualna i uspravna.



Slika 13: Slika stvorena lomom na sfernoj površini. Zrake koje zatvaraju male kutove s glavnom osi divergiraju iz točke predmeta  $O$  i refraktiraju se kroz točku slike  $I$ .

**Konveksno zrcalo** Konveksno se zrcalo katkad zove **divergentno zrcalo**, jer zrake pri refleksiji divergiraju kao da dolaze iza zrcala. Slika je virtualna, jer se čini da reflektirane zrake izlaze iz slike. Uvijek je slika uspravna i manja od predmeta.

Jednadžba ovog zrcala ista je kao i kod konkavnog ako su pozitivne veličine ispred zrcala (zrake koje se gibaju prema zrcalu), a iza negativne.

**Kviz 2.3.** Želimo zapaliti papir refleksijom zraka sa Sunca pomoću zrcala. Koje zrcalo trebamo upotrijebiti? (a) ravno, (b) konkavno, (c) konveksno. *Rješenje:* (b). Konkavno zrcalo fokusira zrake.

### 2.1.2 Slike stvorene lomom (refrakcijom)

Ovdje ćemo opisati kako se formiraju slike kad se zrake lome na granici između prozirnih materijala. Promotrimo dva prozirn sredstva indeksa loma  $n_1$  i  $n_2$ , a granica između njih je sferna površina polumjera  $R$ , slika 13. Neka se predmet nalazi u sredstvu  $n_1$ . Neka paraksijalne zrake izlaze iz  $O$ .

Slika 14 pokazuje jednu zraku koja izlazi iz točke  $O$  i lomi se u točku  $I$ . Snellov zakon loma daje

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \rightarrow n_1 \varphi_1 \approx n_2 \varphi_2,$$

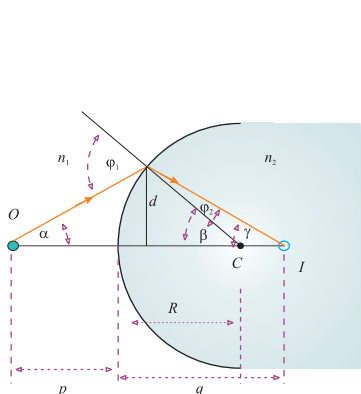
jer su kutovi mali.

Koristimo pravilo da je vanjski kut trokuta jednak sumi nasuprotnih unutarnjih kutova. Primjena na trokute  $OPC$  i  $PIC$  na slici 14 daje

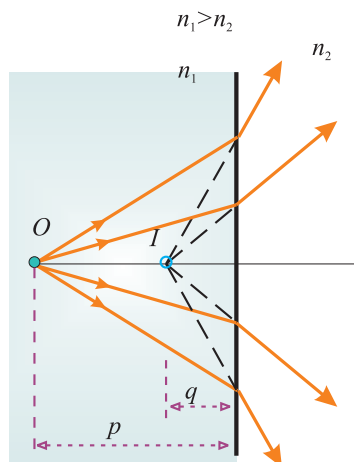
$$\varphi_1 = \alpha + \beta, \quad \beta = \varphi_2 + \gamma.$$

Eliminiranjem  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , nalazimo

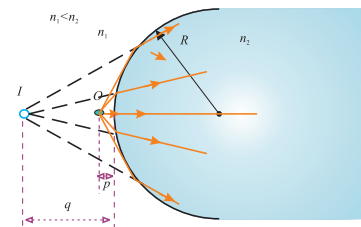
$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta. \quad (2.9)$$



Slika 14: Geometrija za izvod jednadžbe Eq. (2.10), pod pretpostavkom da je  $n_1 < n_2$ .



Slika 15: Slika od ravne prozirne plohe je virtualna i na istoj strani plohe kao i predmet.



Slika 16: Uz kviz 2.4

Iz slike 14, vidimo tri pravokutna trokuta koja imaju zajedničku vertikalnu stranicu duljine  $d$ . Za paraksijalne zrake, horizontalna stranica je otprilike  $p$  za trokut koji sadrži kut  $\alpha$ ,  $R$  za trokut s kutom  $\beta$ , i  $q$  za trokut s kutom  $\gamma$ . Za aproksimaciju s malim kutovima  $\text{tg } \varphi \approx \varphi$  je

$$\text{tg } \alpha \approx \alpha \approx \frac{d}{p}, \quad \text{tg } \beta \approx \beta \approx \frac{d}{R}, \quad \text{tg } \gamma \approx \gamma \approx \frac{d}{q}.$$

Zamijenimo ove izraze u (2.9), pa podijelimo s  $d$

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (2.10)$$

Za predmet na udaljenosti  $p$ , udaljenost slike  $q$  ne ovisi o kutu zrake s osi, odnosno, za paraksijalne zrake fokus je u istoj točki  $I$ .

Kao i za zrcala, moramo imati dogovor o predznaku. Strana od kuda dolaze zrake je prednja strana. Realna slika stvara se iza plohe, za razliku od zrcala. Zbog toga je predznak kod refrakcije za  $q$  i  $R$  suprotan predznaku kod refleksije.

### 2.1.3 Ravna prozirna ploha

Ako je refraktirajuća ploha ravna,  $R$  je beskonačno i jednadžba Eq. (2.10) se reducira na

$$\frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q} \rightarrow q = -\frac{n_2}{n_1}p. \quad (2.11)$$

Vidimo da je predznak od  $q$  suprotan nego od  $p$ . Dakle, **slika je na istoj strani kao i predmet**. To je ilustrirano na slici 15. Ako je  $n_1 < n_2$ , zrake na stražnjoj strani divergiraju, pa slika nastaje između predmeta i plohe.

**Kviz 2.4.** Ako na slici 13 predmet  $O$  mičemo na desno iz vrlo velike daljine do vrlo blizu plohi, što će se desiti sa slikom  $I$ ? (a) Uvijek je na desno od plohe. (b) Uvijek je lijevo od plohe. (c) Kreće se

lijeve pozicije, a onda u nekom trenutku se giba na desno od plohe. (d) Starta s desne strane, a onda se giba na lijevoj strani.

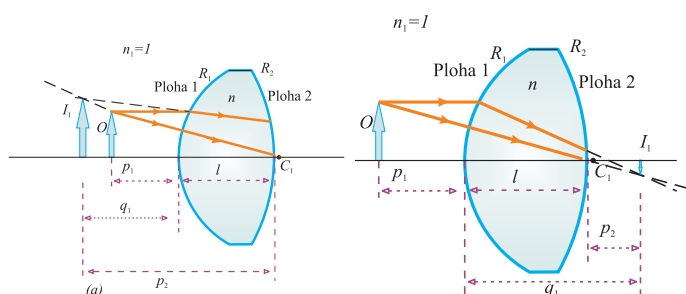
*Rješenje:* (d). Kad je  $O$  daleko, zrake se lome u sredstvo indeksa  $n_2$  i konvergiraju da stvore realnu sliku kao u 13. za određenu kombinaciju od  $R$  i  $n_2$  kad se  $O$  približi vrlo blizu prozirnoj plohi, upadni kut se povećava tako jako da se zrake ne mogu lomiti prema optičkoj osi, i to rezultira stvaranjem virtualne slike prikazane dolje.

**Kviz 2.5.** Što će se desiti sa slikom predmeta  $I$  ako se na slici 15 točka  $O$  giba prema desnom kraju plohe materijala indeksa loma  $n_1$ ? (a) Uvijek će ostati između  $O$  i plohe, prilazeći plohi kao i  $O$ . (b) Prilazi plohi sporije nego  $O$  tako da je  $O$  eventualno prijeđe. (c) Prilazi plohi i tada se giba na desno od plohe.

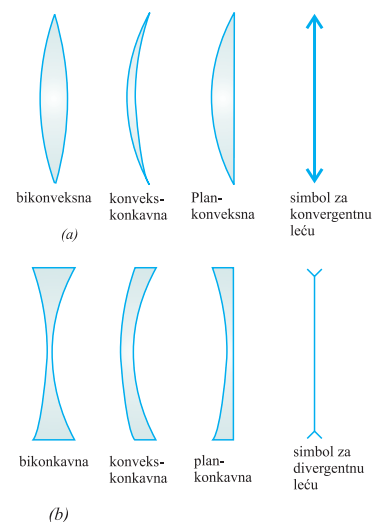
*Rješenje:* (a) Ma gdje je  $O$ , zrake se lome u zraku od normale i tvore sliku između  $O$  i plohe.

### 2.1.4 Tanke leće

Leće se uobičajeno koriste za stvaranje slika u optičkim instrumentima. Zraka svjetlosti koja prolazi kroz leću se lomi na dvije plohe. Notacija je da **slika stvorena s jednom refraktirajućom plohom je objekt za drugu plohu**. Proučavati ćemo debelu leću i tada pustiti da debljina ide u nulu.



Slika 17: Za lociranje slike stvorene lećom, koristimo virtualnu sliku u  $I_1$  stvorenu plohom 1 kao predmet za sliku stvorenu plohom 2. Točka  $C_1$  je centar zakrivljenosti plohe 1.



Slika 18: Različiti oblici leća i simboli za njih. (a) Konvergentne leće imaju pozitivnu žarišnu daljinu i deblje su u sredini, kao što indicira simbol za konvergentne leće. (b) Divergentne leće imaju negativnu žarišnu daljinu i deblje su na krajevima.

Neka leća ima indeks loma  $n$  i dvije sferične plohe polumjera  $R_1$  i  $R_2$ . Predmet je stavljen u  $O$  na udaljenosti  $p_1$  ispred prve plohe.

Za sliku dobivenu od plohe 1, pretpostavljamo da je  $n_1 = 1$ , jer je leća okružena zrakom, nalazimo

sliku  $I_1$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1} \quad (2.12)$$

gdje je  $q_1$  položaj slike zbog površine 1. Ako je slika zbog površine 1 virtualna,  $q_1$  je negativno, a pozitivno ako je slika realna.

Za površinu 2 uzimamo  $n_1 = n$ ,  $n_2 = 1$ . Jednadžba je

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{R_2}. \quad (2.13)$$

Slika dobivena prvom plohom je predmet za drugu

$$\begin{aligned} \text{Virtualna slika od plohe 1: } p_2 &= -q_1 + l, & q_1 &\text{ je negativan,} \\ \text{Realna slika od plohe 1: } p_2 &= -q_1 + l, & q_1 &\text{ je pozitivan,} \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdje je  $l$  debljina leće. Za tanku leću (debljina je mala prema polumjeru zakrivljenosti), možemo zanemariti  $l$ , pa vidimo da vrijedi  $p_2 = -q_2$ :

$$-\frac{n}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{R_2}. \quad (2.15)$$

Zbrajanjem ove jednadžbe jednadžbi (2.12) nalazimo

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.16)$$

Izostavimo indeks u  $p_1$  i  $q_2$ , i nazovimo udaljenost predmeta od leće  $p$ , a udaljenost slike  $q$ :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.17)$$

Ovaj izraz daje relaciju između udaljenosti slike  $q$  stvorene tankom lećom, predmeta na udaljenosti  $p$  i osobina leće. Vrijedi samo za paraksijalne zrake i kad je debljina leće mnogo manja od polumjera  $R_1$  i  $R_2$ .

**Žarišna daljina** tanke leće je udaljenost slike koja odgovara predmetu na beskonačnoj udaljenosti. Stavimo  $p \rightarrow \infty$ , a  $q \rightarrow f$ , vidimo da je inverz žarišne daljine (**jakost leće** koja se mjeri u **dioptrijama**)

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.18)$$

Korištenjem ove jednadžbe, možemo napisati **jednadžbu leće**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (2.19)$$

Kako svjetlost prolazi kroz leću, svaka leća ima dva žarišta, jedno za zrake koje prolaze jednim smjerom, drugo za one koje prolaze drugim smjerom.

Tablica 1 daje konvenciju za predznake za tanke leće. Zapazite da su konvencije iste kao za refraktirajuću površinu. Za bikonkavnu leću su, kad vrijedi  $p > f$ , po tome, veličine  $p$ ,  $q$  i  $R_1$  pozitivne, a  $R_2$  negativna.

Različiti tipovi leća prikazani su na slici 18. Zapazite da konvergentne leće su deblje u sredini, a divergentne su deblje na krajevima nego u sredini.

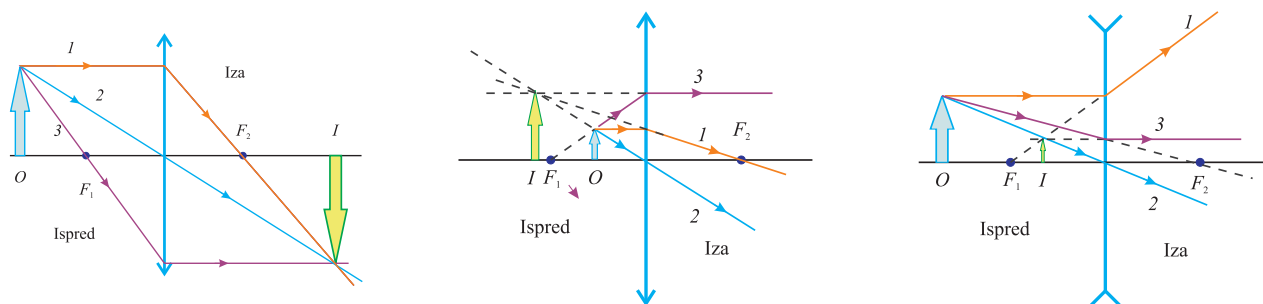
Povećanje leće je

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}.$$

Vidimo da kad je  $M$  pozitivno, slika je uspravna i na istoj strani leće kao i predmet.

Veličina	pozitivna kad	negativna kad
Pozicija predmeta $O$	Predmet je ispred leće (realni)	Predmet je iza leće (virtualni)
Pozicija slike $O$	Slika je iza leće (realna)	Slika je ispred leće (virtualna)
Visina slike	Slika je uspravna	Slika je obrnuta
$R_1$ i $R_2$	Centar zakrivljenosti je iza leće	Centar Zakrivljenosti je ispred leće
žarišna daljina	Konvergentne leće	Divergentne leće

Tablica 1: Konvencija za predznake za tanke leće



Slika 19: Dijagram za lociranje slike formirane lećama. (a) Kad je predmet ispred leće i izvan žarišta, slika je realna, obrnuta i s druge strane leće. (b) Kad je predmet između fokusa i konvergentne leće, slika je virtualna, uspravna, i veća od predmeta i na istoj strani gdje i predmet. (c) Kad je predmet bilo gdje ispred divergentne leće, slika je virtualna, uspravna, manja od predmeta i na istoj strani gdje i predmet.

**Konstrukcija slike kod tankih leća** Lociranje slike *konvergentnih* leća određuje se pomoću tri specifične zrake koje se crtaju s vrha predmeta (slika 19(a) i (b))

1. Zraka koja ide paralelno optičkoj osi lomi se i prolazi fokusom na drugoj strani leće.
2. Zraka koja prolazi središtem leće se ne lomi.
3. Zraka koja prolazi fokusom ispred leće (ili koja kao da dolazi iz fokusa) lomi se i ide paralelno optičkoj osi s druge strane leće.

Kad se dobije slika kao presjek dvije od tri karakteristične zrake, treća zraka, kao i sve ostale, moraju prolaziti tom slikom. Tako određujemo i lom bilo koje nekarakteristične zrake.

Lociranje slike kod *divergentnih* leća (slika 19(c))

1. Zraka koja ide paralelno optičkoj osi lomi se i izlazi kao da je prošla fokusom na prednjoj strani leće.
2. Zraka koja prolazi središtem leće se ne lomi.
3. Zraka koja je usmjerena na fokus iza leće lomi se i ide paralelno optičkoj osi s druge strane leće.

Za konvergentne leće, kad je predmet na lijevo od fokusa ( $p > f$ ), slika je realna i obrnuta. Kad je između fokusa i leće ( $p < f$ ), slika je virtualna i uspravna. Divergentna leća uvijek daje virtualnu uspravnu sliku.

**Kviz 2.6.** Koja je žarišna daljina stakla prozora? (a) nula, (b) beskonačno, (c) debljina stakla, (d) ne može se odrediti.

*Rješenje:* (b). Jer ravna ploha ima beskonačni polumjer, žarišna daljina je isto beskonačna. Paralelne zrake koje ulaze u staklo fokusiraju se u beskonačnosti, tj. ostaju paralelne i nakon prolaska.

**Kviz 2.7.** Maska za ronjenje obično ima leće ugrađene u staklo za ronioce koji nemaju dobar vid. To im omogućuje da rone bez dodatnih naočala. Dobar dizajn omogućuje ronioce da dobro vide unutar i izvan vode. Normalna leća oka zakrivljena je s obje strane (unutarnje i vanjske). Kako treba biti zakrivljena leća na ronilačkoj maski: (a) samo na prednjoj strani, (b) samo na zadnjoj strani, (c) na obje strane?

*Rješenje:* (b). Ako je krivulja ispred plohe, lom će se razlikovati kad je maska u zraku i u vodi. U namjeri da nema razlike u lomu, prednja ploha maske mora biti ravna.

### 2.1.5 Kombinacija tankih leća

Ako se dvije leće koriste za formiranje slike, sistem se tretira na sljedeći način. Prvo, se locira slika stvorena prvom lećom kao da nema druge leće. Tada se crta dijagram zraka za drugu leću, a predmet je slika stvorena prvom lećom. Slika stvorena drugom lećom konačna je slika sistema. Ako se slika stvorena prvom lećom nalazi sa zadnje strane druge leće, tada se ona tretira kao **virtualni predmet** za drugu leću (tj.  $p$  je negativno). Isti se princip primjenjuje na tri i više leća. Povećanje sistema je umnožak povećanja pojedinih leća.

Razmotrimo specijalni slučaj sistema od dvije leće žarišnih daljina  $f_1$  i  $f_2$  koje se dodiruju. Ako je  $p_1 = p$  udaljenost predmeta od kombinacije leća, primjenom jednadžbe tanke leće na prvu leću imamo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1},$$

gdje je  $q_1$  udaljenost slike od prve leće. Ta slika je predmet za drugu leću i udaljenost predmeta joj je  $p_2 = -q_1$ . (Udaljenost je jednaka jer su leće u kontaktu i pretpostavka je da su beskonačno tanke. Negativni predznak je jer je predmet virtualan, sa zadnje strane druge leće.) Dakle, za drugu leću je

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} \rightarrow -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2},$$

gdje je  $q_2 = q$  konačna udaljenost slike od druge leće, odnosno sistema. Zbrajanjem jednadžbi za obje leće eliminira  $q_1$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Usporedbom s jednadžbom jedne leće lako vidimo da je jakost kombinacije

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (2.20)$$

Dakle, **dvije tanke leće u međusobnom kontaktu ekvivalentne su jednoj tankoj leći čija je jakost zbroj jakosti individualnih leća.**

### 2.1.6 Oko

Normalno oko fokusira svjetlost i daje jasnu sliku. Naravno, mehanizam koji kontrolira količinu svjetla i prilagodbu leće da korektno fokusira svjetlost je vrlo složen.

Leća oka se može akomodirati pa žarišna daljina oka varira od  $f/2.8$  do  $f/16$ . Leća stvara sliku na zadnjoj strani oka gdje se nalaze receptori zvani *štapići* i *čunjići*. Kad su stimulirani svjetlom oni šalju impuls optičkim živcem u mozak.

Oko se fokusira na predmet varirajući oblik leće kroz proces **akomodacije**. Za predmet na beskonačnoj udaljenosti leća postaje plosnatija povećavajući time žarišnu daljinu. Tada je žarišna daljina jednaka fiksnoj udaljenosti između leće i mrežnice od oko 1.7 cm. Za bliže predmete, leća se nadima, izbočuje i žarišna daljina se time smanjuje.

Akomodacija je limitirana pa slika objekta koji je preblizu neće biti jasna. **Bliza točka** je najmanja udaljenost na koju se leća može akomodirati. Ta se udaljenost obično povećava s godinama. Srednja vrijednost je oko 25 cm. Obično je u 10. godini oko 18 cm, 20. je 25 cm, a oko 50. godine 40–50 cm ili veća. **Daleka točka** je najveća udaljenost za koju se leća može opustiti i za normalni vid uzima se da je to beskonačno.

Oko vidi boje pomoću tri tipa čunjića od kojih je svaki tip osjetljiv na jednu od boja: plavu, zelenu ili crvenu. Kombinacija tih osnovnih boja daje boje iz vidljivog dijela spektra elektromagnetnog zračenja. Tako se žuta boja dobije kombinacijom crvene i zelene. To se koristi naprimjer kod televizora u boji.

Ako zrake bliskih predmeta padnu na mrežnicu prije nego konvergiraju da stvore sliku (tj. pozicija slike je iza oka–mrežnice), oko je **dalekovidno–hiperopia**. Drugim riječima, tom je oku bliska točka na većoj udaljenosti od 25 cm.

Osoba je **kratkovidna** (ili *miopija*) kad daleka točka nije u beskonačnosti. Slika dalekih predmeta se ne može stvoriti na mrežnici, zrake dalekih predmeta konvergiraju ispred mrežnice, a kad stignu na mrežnicu nisu fokusirane i slika točke je krug. Kratkovidnost se korigira divergentnim lećama, a dalekovidnost konvergentnim lećama.

**Astigmatizam** nastaje kad leća nije potpuno simetrična, pa točkasti izvor daje liniju kao sliku. On se korigira lećama koje imaju različite zakrivljenosti na međusobno okomitim smjerovima.

Jačina leća se obično mjeri u **dioptrijama**: **jakost**  $j$  leće jednaka je inverzu fokalne daljine u metrima:  $j = 1/f$

**Kviz 2.8.** Dva kampera žele zapaliti vatru tijekom sunčanog dana. Jedan je kratkovidan, drugi dalekovidan. Čije će naočale upotrijebiti da bi fokusirali sunčeve zrake da zapale papir: (a) bilo čije, (b) kratkovidnog, (c) dalekovidnog kampera? *Rješenje:* (c). Sunčeve zrake moraju konvergirati na papir. Dalekovidni čovjek nosi konvergentne leće.

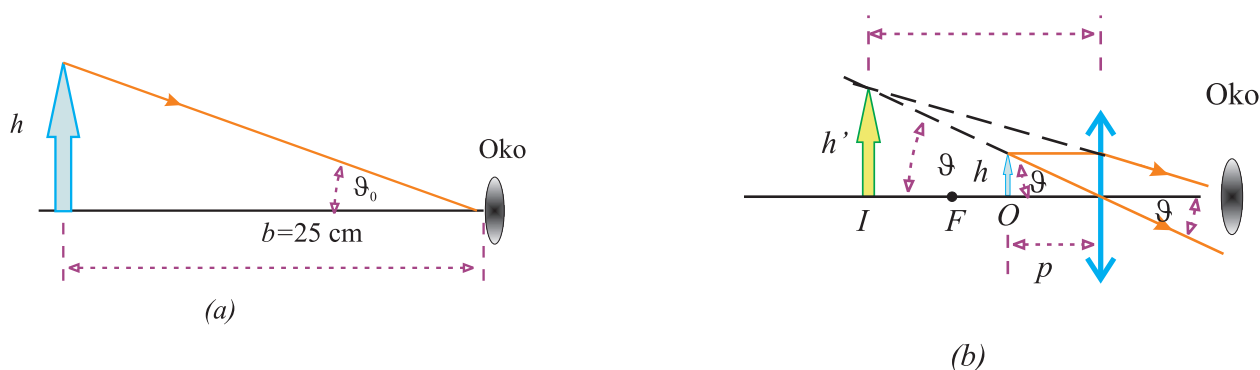
### 2.1.7 Jednostavno povećalo

Jednostavno povećalo sastoji se od jedne konvergentne leće.

Pretpostavimo da je predmet na udaljenosti  $p$ . Veličina slike formirane na retini ovisi o kutu  $\vartheta$  pod kojim ga vidi oko. Kad se predmet miče bliže oku, povećava se kut i predmet se čini većim. Maksimalnu veličinu vidjet ćemo kad se predmet nalazi u bliskoj točki,  $\vartheta = \vartheta_0$ . Ako je predmet bliže slika neće biti jasna.

Dalnje povećanje kutne veličine može se postići postavljenjem konvergentne leće ispred oka. Predmet postavimo u točku  $O$  baš unutar fokusa leće. Tad će leća dati virtualnu, uvećanu, uspravnu sliku. Definiramo **kutno povećanje**  $m$  kao omjer kuta  $\vartheta$  pod kojim vidimo predmet s lećom i kuta  $\vartheta_0$  pod kojim ga vidimo u bliskoj točki.:

$$m \equiv \frac{\vartheta}{\vartheta_0}. \quad (2.21)$$



Slika 20: (a) Predmet je stavljen u blisku točku  $p = b \equiv 25 \text{ cm}$ . Kut pod kojim upada u oko je  $\vartheta_0 = h/b$  (b) Predmet je postavljen blizu fokusa konvergentne leće stvarajući sliku s kutom  $\vartheta = h'/b$ .

Kutno povećanje je maksimalno kad je slika u bliskoj točki, tj.  $q = -b$ . Udaljenost predmeta koja daje tu sliku je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \rightarrow p = \frac{bf}{b-f} = \frac{25f}{25+f}$$

gdje je  $f$  žarišna daljina povećala u cm. Za male kutove vrijedi aproksimacija

$$\text{tg } \vartheta_0 \approx \vartheta_0 = \frac{h}{25} \text{ i } \text{tg } \vartheta \approx \vartheta \approx \frac{h}{p}. \quad (2.22)$$

Tad je maksimalno povećanje

$$m_{max} = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{h/p}{h/25} = \frac{25}{p} = \frac{25}{25f/(25+f)} = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f}. \quad (2.23)$$

### 2.1.8 Mikroskop

Veće povećanje nego ga daje jednostavno povećalo može se dobiti kombinacijom dvije leće u spravi koju zovemo **mikroskopom**. Shematski dijagram dan je na slici 21. On se sastoji od leća, *objektiva* s vrlo kratkom žarišnom daljinom  $f_0 < 1 \text{ cm}$  i druge leće *okulara* s žarišnom daljinom  $f_e$  od nekoliko centimetara.

Leće su međusobno udaljene za  $L \gg f_e$ . Predmet se stavlja malo izvan žarišta objektiva, a slika treba pasti u ili blizu fokusa okulara. Okular služi kao jednostavno povećalo stvara u  $I_2$  virtualnu, uvećanu sliku od  $I_1$ . Povećanje prve slike je  $M_1 = -q_1/p_1$ . Zapazite da je  $q_1 \approx L$  i da je predmet vrlo blizu fokusu objektiva:  $p_1 \approx f_0$ . Tada je linearno povećanje objektiva

$$M_o \approx -\frac{L}{f_0}.$$

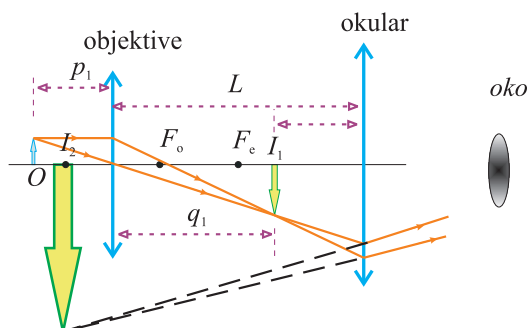
Kutno povećanje okulara je

$$m_e = \frac{25 \text{ cm}}{f_e}.$$

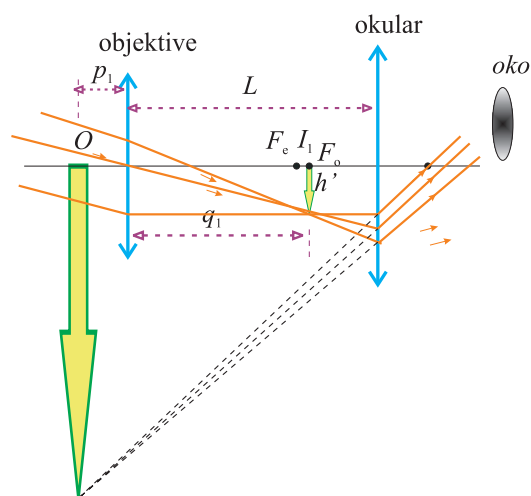
Ukupno povećanje je produkta linearnog i kutnog povećanja:

$$M = M_o m_e = -\frac{L}{f_0} \left( \frac{25 \text{ cm}}{f_e} \right). \quad (2.24)$$

Negativni predznak indicira da je slika invertirana.



Slika 21: Dijagram mikroskopa koji se sastoji od objektivna i okulara.



Slika 22: Aranžiranje leća kod teleskopa s predmetom u beskonačnosti.

### 2.1.9 Teleskop

Postoje dva tipa **teleskopa**. Oba su dizajnirana da pomognu u promatranju udaljenih predmeta. **Refraktor** koristi kombinaciju leća za stvaranje slike, a **teleskop reflektor** koristi zakrivljeno zrcalo i leće.

Kombinacija leća na slici 22 je teleskop refraktor. Kao i mikroskop, teleskop ima objektiv i okular. Leće su tako složene da objektiv stvara realnu, obrnutu sliku udaljenih predmeta vrlo blizu fokusu okulara. Kako je predmet praktički u beskonačnosti, točka  $I_1$  u kojoj se stvara slika je u žarištu objektivna. Okular tada formira sliku u  $I_2$  koja je povećan, obrnuta od  $I_1$ . Da bi se postiglo maksimalno povećanje, udaljenost slike okulara je beskonačna. To znači da će zrake iz okulara izlaziti paralelno optičkoj osi, i slika iz objektivna mora padati u fokus okulara. Dakle, leće su međusobno udaljene za  $f_o + f_e$ , što odgovara duljini teleskopa.

Kutno povećanje teleskopa dano je s  $\vartheta/\vartheta_o$ , gdje je  $\vartheta_o$ , kut kojeg čini predmet s objektivom, a  $\vartheta$  je kut konačne slike s okom. Promotrimo sliku 22, na kojoj je predmet jako daleko na lijevoj strani slike. Kut  $\vartheta_o$  predmeta i objektivna (lijevo do objektivna) je isti kao kut prve slike i objektivna (na desnoj strani). Tako je

$$\operatorname{tg} \vartheta_o \approx \vartheta_o \approx -\frac{h'}{f_o}.$$

Kut  $\vartheta$  određen konačnom slikom i okom, jednak je kutu od zrake koja dolazi s kraja od  $I_1$  i koja putuje paralelno optičkoj osi nakon što prođe kroz leće:

$$\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta \approx \frac{h'}{f_e}.$$

Predmet koji stvara konačnu sliku  $I_2$  je  $I_1$ , i obje pokazuju isti smjer. Dakle, kutno povećanje teleskopa se može prikazati kao

$$m = \frac{\vartheta}{\vartheta_o} = \frac{h'/f_e}{-h'/f_o} = -\frac{f_o}{f_e} \quad (2.25)$$

odnosno, jednako omjeru žarišnih daljina objektivna i okulara. Negativni predznak znači da je slika obrnuta.

## **Literatura**

- [1] Yavorski - Pinski: fundamentals
- [2] Serway, Jevett: Physics for the scientist, [www.pse6.com](http://www.pse6.com)
- [3] Feynman Lectures on Physics vol 1.