

PRIMJENA MATEMATIČKIH ALATA U ELEKTROTEHNICI

TIBOR POGANJ

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

1. Uvodni pojmovi i neke definicije

Svaka jednadžba u kojoj učestvuju: neovisna varijabla, argument x , funkcija $y = y(x)$ i derivacije te funkcije y', y'', y''', \dots je *diferencijalna jednadžba*. Kako se u ovom opisu NE spominju parcijalne derivacije, radi se o *običnoj diferencijalnoj jednadžbi* – ODJ. Njen općeniti *eksplicitni oblik* je

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.1)$$

odnosno *implicitni oblik*:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.2)$$

Kako je ovdje $y^{(n)}$ derivacija najvišeg reda, (1.1), (1.2) su ODJ n -toga reda.

Rješenje navedenih ODJ je funkcija $y = h(x)$, $x \in I = (a, b)$, koja zajedno sa svojim derivacijama $y' = h'(x), \dots, y^{(n)} = h^{(n)}(x)$ identično zadovoljava polaznu jednadžbu, tj. ako u (1.1), (1.2) zamijenimo svugdje $h(x)$ umjesto varijable y , tada dobivamo identitet (što pišemo \equiv) na čitavom intervalu (a, b) (a ne nekakvu jednadžbu po x , što pišemo $=$). Rješenje možemo polučiti i u implicitnom obliku

$$H(x, y) = 0;$$

uvom slučaju tu funkciju nazivamo *integral* pripadne ODJ, dok $h(x)$ ostaje *rješenje*. (Sve to da bi ih nekako razlikovali).

2. Obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

Kao što je u uvodu bilo rečeno, derivacija najvišeg reda diktira dio imena ODJ. Stoga jednadžba prvog reda sadrži povezane x, y i y' eksplicitno, tj. implicitno, redom:

$$y' = f(x, y), \quad F(x, y, y') = 0. \quad (2.1)$$

ODJ prvog reda ima za rješenje funkciju $y = h(x)$, $x \in I$, što znači da je $h' \equiv f(x, h)$, $F(x, h, h') \equiv 0$. Kako se radi o jednadžbama koje imaju JEDNU

derivaciju, nju ćemo prije ili kasnije eliminirati JEDNIM integriranjem; to znači da će negdje u rješenju nastupiti i JEDNA integracijska konstanta c . Rješenje $y = h(x, c)$ je *opće rješenje* (OR), dok je $H(x, y, c) = 0$ tzv. *opći integral* (OI) od (2.1) (bilo za lijevu, bilo za desnu jednadžbu).

Fiksirajući konstantu $c = c_0$ (dajući joj numeričku vrijednost), iz općeg dobivamo *partikularno rješenje*.

Postoji još takozvano i sigularno rješenje ODJ, koje jeste rješenje, ali nije specijalan slušaj općeg rješenja/integrala.

Primjer 2.1. Jednadžba $y'^2 - xy' + y = 0$ ima opće rješenje $y = cx - c^2$ (što provjeravamo direktno uvrštavanjem!), dok joj je $y = x^2/4$ sigularno rješenje. Očigledno nikakva numerička vrijednost neće iz općeg rješenja (koje je linearna funkcija) dati kvadratnu parabolu $y = x^2/4$. \square

Sustav

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.2)$$

naziva se *Cauchyjev zadatak* (čitaj: košI)¹ ili *problem početnog uvjeta*. Ta zadaća rješava potragu za ravninskom krivuljom koja prolazi točkom $T(x_0, y_0)$. Preko Cauchyjevog (rubnog) uvjeta fiksiramo vrijednost integracijske konstante c u općem rješenju/integralu.

2.1. ODJ sa separacijom varijabli. Opći oblik te vrste ODJ je

$$y' = f(x)g(y); \quad (2.3)$$

rješavamo je separacijom varijabli (razdvajanjem varijabli *hrv.*), tj. zamjenom

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

zatim y nalijevo, x -evi nadesno (od znaka jednakosti). Napokon dobivamo nešto slično OR

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c; \quad (2.4)$$

tu jednakost rješavamo po y (a može se riješiti i po x !) nakon integriranja.

Primjer 2.2. Riješi problem početnog uvjeta

$$y' + 5x^4y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

Nakon kraćeg računa dobivamo OR

$$y = \frac{1}{x^5 - c},$$

¹kod Francuza velikim slovom oznčavamo akcent, koji je UVIJEK na zadnjem slogu u riječi!

dok nakon primjene rubnog uvjeta na OR, $c = -1$. Zaključujemo da je

$$y = \frac{1}{x^5 + 1}. \quad \square$$

2.2. Homogena DJ. Sada smo naišli na jednu vrstu homogenosti (drugu vrstu homogenosti vidjet ćemo kasnije). Naime, kažemo da je realna funkcija n realnih varijabli $f: \mathbb{R}^n \mapsto A \subseteq \mathbb{R}$ *homogena reda k* , ako vrijedi

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n).$$

Primjer 2.3. Primjeri homogenih funkcija su $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, koja je homogena reda $k = 2$, zbog $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$, odnosno $f(x, y) = \ln x - \ln y$, koja je homogena nultog reda, dok $f(x, y) = \ln(xy)$ nije homogena. \square

Opći oblik homogene DJ je

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{supstitucija } y = t(x) \cdot x \quad (2.5)$$

gdje uglavnom pišemo $t(x) = t$. (Vidimo da je izraz u zagradi u (2.5) homogen, i to nultoga reda, odatle i naziv ove vrste DJ). Nakon zamjene $y' = t'x + t$ u (2.5) i kraćeg računanja dobivamo da je

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln x + c; \quad (2.6)$$

nakon nalaženja vrijednosti integrala vraćamo y/x umjesto t , itd.

2.3. Totalni diferencijal. Neka je $z = f(x, y)$ funkcija dvije realne varijable, koju promatramo na nekoj domeni $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Pripadni totalni diferencijal definiramo kao izraz

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

gdje

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

predstavljaju tzv. *parcijalne derivacije* funkcije $f(x, y)$ po x , pa po y . (To shvaćamo kao derivaciju funkcije dvije varijable koju deriviramo po jednoj varijabli, nju pišemo u nazivniku, dok drugu varijablu smatramo zadanom, fiksiranom, k'o da se radi o konstanti).

Opći oblik *DJ totalnog diferencijala* (TD) je:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.7)$$

ako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \quad (2.8)$$

za neku zadanu derivabilnu funkciju f .

Neka su M, N definirane u nekoj domeni $D \subseteq \mathbb{R}^2$, neka posjeduju parcijalne derivacije prvoga reda u toj istoj domeni. Tada je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Na osnovu jednog teorema jednog Schwarza tada je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Ta jednakost znači da je $Mdx + Ndy$ totalni diferencijal, ali vrijedi i obrat, tj. ako je $Mdx + Ndy$ TD neke funkcije f , tada vrijedi (2.9).

Integrirajmo prvu jednakost u (2.8):

$$f(x, y) = \int M dx + k(y), \quad (2.10)$$

gdje se $k(y)$ izračunavamo iz (2.10). Preko $\frac{\partial f}{\partial y}$ nalazimo iz $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ funkciju $k'(y) = \frac{dk}{dy}$, te integriranjem po y sljeduje $k(y)$.

Primjer 2.4. Riješi $y^3 dx + 3xy^2 dy = 0$. Provjeravamo radi li se o DJ TD. Kako je $M = y^3, N = 3xy^2$, lagano dobijemo ispunjenje uvjeta (2.9):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Kako je iz (2.10)

$$f(x, y) = \int y^3 dx + k(y) = y^3 x + k(y),$$

pa je

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + k'(y) = 3xy^2 \quad \rightarrow \quad k'(y) = 0;$$

zaključujemo da je $k(y) = \text{const}$. Prema tome, opće rješenje zadane jednačbe je $f(x, y) = c$, jer je to DJ TD. To znači da je

$$y^3 x = c. \quad \square$$

Umjesto (2.10) možemo se poslužiti i s

$$f(x, y) = \int N dy + \ell(x), \quad (2.11)$$

gdje nepoznatu funkciju $\ell(x)$ nalazimo preko $\frac{\partial f}{\partial x}, \ell'(x)$ iz $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ itd.

No, život uglavnom nije tako jednostavan kao u prethodnom slučaju, tj. većina DJ tipa (2.7) nije zadana u obliku TD. Sada se moramo snalaziti. Dakle, ako DJ $Pdx + Qdy = 0$ nema TD na lijevoj strani, tada imamo ekvivalentnu jednadžbu

$$FP dx + FQ dy = 0; \quad F = F(x, y) \neq 0, (x, y) \in D.$$

Za tu transformiranu lijevu stranu prepostavljamo da JESTE TD, te dobivenu jednadžbu rješavamo prethodnom metodologijom. Sada preostaje SAMO naći ovaj, takozvani *intergacijski faktor* F .

Kako do F ?

Na osnovu definicije TD je

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ)$$

odnosno u razvijenom obliku

$$\frac{\partial F}{\partial y}P + \frac{\partial P}{\partial y}F = \frac{\partial F}{\partial x}Q + \frac{\partial Q}{\partial x}F. \quad (2.12)$$

Predpostavljajući da je $F = F(x)$, odnosno da je F funkcija samo jednog argumenta, ova gornja jednadžba se značajno pojednostavljuje:

$$F \frac{\partial P}{\partial y} = F'(x)Q + \frac{\partial Q}{\partial x}F.$$

Odatle je

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = R(x). \quad (2.13)$$

Teorem 1. *Ako je $Pdx + Qdy = 0$ takva DJ da je desna strana (2.13) funkcija samo x -a, tada je intergacijski faktor $F = F(x)$ zadan formulom*

$$F(x) = \exp \left\{ \int R(x) dx \right\}. \quad (2.14)$$

Sličnim rasuđivanjem, ako je $F = F(y)$, imamo iz (2.12) da je

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{dF}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \tilde{R}(y),$$

odnosno vrijedi

Teorem 2.

$$F(y) = \exp \left\{ \int \tilde{R}(y) dy \right\}. \quad (2.15)$$

Primjer 2.5. Riješi problem početnog uvjeta

$$2xydx + (4y + 3x^2)dy = 0, \quad y(-0.2) = -1.5.$$

Prvo provjeravamo radi li se o DJ TD. No, kako je $P = 2xy, Q = 4y + 3x^2$, bit će

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \neq 6x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

te moramo naći intergacijski faktor F , ako hoćemo do rješenja. Imamo da je

dakle, \tilde{R} ovisi samo o jednoj varijabli. Nalazimo dakle F formulom (2.14) iz Teorema 2:

$$F(y) = \exp \left\{ \int \frac{2}{y} dy \right\} = y^2.$$

Prema tome polaznu jednadžbu pomnožimo s y^2 , čime ona postaje DJ TD:

$$2xy^3 dx + (4y^3 + 3x^2 y^2) dy = 0.$$

Kako se sada radi o DJ TD, rješenje je neka funkcija $f(x, y) = c$. Nalazimo f metodom koja je već korištena ranije:

$$f(x, y) = x^2 y^3 + y^4 = c.$$

A c ? Za to služi početni uvjet $y(-0.2) = -1.5$, čijom zamjenom u zadnju relaciju slijedi $c = 0.004 \cdot (-1.5)^3 + (-1.5)^4 = 4.9275$. Napokon dobivamo krivulju

$$x^2 y^3 + y^4 = 4.9275. \quad \square$$

2.4. Linearna diferencijalna jednadžba. Opći oblik linearne DJ je

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (2.16)$$

Ime zaslužuje po nepoznatoj funkciji y , i njenoj prvoj derivaciji y' , po kojima je (2.16) linearna. Ako je intervalu promatranja $x \in I = (a, b)$ "slobodni dio" $q(x) \equiv 0$, tada se radi o *homogenoj* DJ (to je već druga vrsta homogenosti!), dok je u suprotnom slučaju DJ *nehomogena*.

Homogena linearna DJ svodi se na separaciju varijabli - vidi §2.1., dok je opće rješenje nehomogene linearne DJ (2.16)

$$y = e^{-\int p dx} \left(\int q e^{\int p dx} dx + c \right), \quad p = p(x), \quad q = q(x). \quad (2.17)$$

Zaista, ako pomnožimo (2.16) s pozitivnim faktorom $\exp \left\{ \int p dx \right\}$, dobivamo

$$y' e^{\int p dx} + p e^{\int p dx} y = q e^{\int p dx}.$$

Uočavamo da je lijeva strana potonje jednakosti u stvari

$$y' e^{\int p dx} + p e^{\int p dx} y = \left(y e^{\int p dx} \right)' = \frac{d}{dx} \left(y e^{\int p dx} \right).$$

Sada je

$$d\left(y e^{\int p dx}\right) = q e^{\int p dx} dx,$$

te neposrednim integriranjem dobivamo OR (2.17).

Tu ISTU formulu dobivamo i metodom varijacije konstante, kao i supstitucijom $y = u \cdot v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$. (Naime, radi se o matematici, gdje istinite tvrdnje ostaju istinite bez obzira na političku, religijsku, karakternu i inu pripadnost onog ko je prakticira).

2.5. Bernoullijeva DJ. Općeg je oblika

$$y' + p y = q y^\alpha, \quad \alpha \notin \{0, 1\}. \quad (2.18)$$

Vidimo da je Bernoullijeva DJ nelinearna. No, zašto isključujemo vrijednosti 0, 1 eksponenta α ? Ako je $\alpha = 0$, tada je Bernoullijeva DJ linearna – vidi §2.4, dok u slučaju $\alpha = 1$ dobivamo

$$y' + (p - q)y = 0,$$

što je DJ koja razdvaja promjenjive - vidi §2.1.

Supstitucijom $z = y^{1-\alpha}$ Bernoullijeva DJ (2.18) svodi se na linearnu DJ. Možemo uvesti i supstituciju $y = u \cdot v$.

2.6. Osobine linearne DJ. Neka je linearna DJ još i homogena, tj. radi se o jednadžbi

$$y' + p y = 0. \quad (2.19)$$

Za nju vrijedi:

- (i) $y = 0$ je rješenje (koje se zove *trivijalno*);
- (ii) ako je y rješenje, tada je i cy rješenje;
- (iii) ako su y_1, y_2 rješenja (2.19), tada je i linearna kombinacija $c_1 y_1 + c_2 y_2$ rješenje.

Predpostavimo da se sada radi o generalnom obliku linearne DJ, tj. neka je ona nehomogena:

$$y' + p y = q. \quad (2.16)$$

Njene su osobine slične, no ima i nekih razlika:

- (iv) Ako je y_1 rješenje (2.16), tada je cy_1 rješenje DJ $y' + p y = cq$;
- (v) ako su y_1, y_2 rješenja od (2.16), tada je linearna kombinacija $c_1 y_1 + c_2 y_2$ rješenje jednadžbe $y' + P y = (c_1 + c_2)q$;

(vi) neka je y_i rješenje jednadžbe $y' + py = q_i$, $i = 1, 2$. Tada je $c_1y_1 + c_2y_2$ rješenje linearne DJ $y' + py = c_1q_1 + c_2q_2$.

2.7. Riccatijeva i Clairautova DJ. Diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y' + py = qy^2 + h, \quad (2.20)$$

gdje su p, q, h neke funkcije jedne realne varijable $x \in (a, b) \neq \emptyset$ nazivamo *Riccatijeva DJ* (čitaj: rikaTi). Ona se deriviranjem često transformira u DJ drugoga reda. Ako znamo jedno njeno rješenje y_1 , tada (2.20) supstitucijom $z = y - y_1$ lagano svodimo na Bernoullijevu DJ - vidi §2.6.

DJ prvoga reda

$$y = xy' + q(y') \quad (2.21)$$

nazivamo *Clairautova DJ* (čitaj: klerO). OR Clairautove jednadžbe (2.21) čine pravci $y = cx + q(c)$, dok joj se singularno rješenje dobiva iz pomoćne jednadžbe $q'(y') = -x$.

Kako dolazimo do tih zaključaka? Diferenciranjem (2.21) dobivamo

$$y' = y' + xy'' + q'(y')y''$$

što se lagano svodi na

$$y''(x + q'(y')) = 0.$$

Kada je $y'' = 0$, nepoznata funkcija y je linearna po x , dok $x + q'(y') = 0$ daje pomoćnu jednadžbu koja rezultira singularnim rješenjem.

Primjer 2.6. *Primjer 2.1. predstavlja Clairautovu DJ. Zaista, možemo je prepisati u*

$$y = xy' - y'^2$$

odakle vidimo da je $q(s) = -s^2$. Na osnovu gornjeg, rješenja su pravci $y = cx - c^2$, dok je SR dobiva iz $q'(y') = -2y' = -x$, što daje $y = x^2/4$. \square

3. Obične diferencijalne jednadžbe drugog reda

Linearna DJ drugoga reda ima opći oblik

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x); \quad (3.1)$$

gdje funkcionalne koeficijente $p(x), q(x), r(x)$ pišemo skraćeno p, q, r , predpostavljajući usput, da njihove domene imaju zajednički neprazan presjek $I = (a, b)$. Ako se DJ drugoga reda NE može napisati u obliku (3.1), tada je ona *nelinearna*. Ako za sve $x \in I$ je $r(x) = 0$, jednadžba je *homogena*. Inače je *nehomogena*. Kako smo u uvodnom dijelu već istakli, rješenje je funkcija $y = h(x)$, koja identično zadovoljava (3.1).

Neka su y_1, y_2 rješenja homogene varijante (3.1) na $I = (a, b)$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (3.2)$$

Tada je i linearna kombinacija tih rješenja $y = c_1y_1 + c_2y_2$ rješenje (3.2). To se zove pravilo *superpozicije, ili linearnosti rješenja* homogene linearne DJ drugoga reda. Iz toga pravila slijedi da su i $cy_1, ky_2, y_1 \pm y_2$ rješenja (3.2).

Inače matematičke objekte (ma što oni bili!) O_1, O_2, \dots, O_m nazivamo *linearno nezavisnim* nad skupom skalara Λ , ako vrijedi sljedeća implikacija (to pišemo \Rightarrow i čitamo: slijedi):

$$\lambda_1 O_1 + \dots + \lambda_m O_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda.$$

Tada objekti O_1, \dots, O_m čine *bazu* nekog m -dimenzionalnog skupa (prostora), koji oni *razapinju*. Sjetimo se ortova $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, koji tvore koordinatni sistem $0xyz$, i koji razapinju svaki vektor u \mathbb{R}^3 (Matematika 1).

Promatramo jednadžbu (3.2). OR te jednadžbe je dobiveno superpozicijom dva *linearno nezavisna rješenja* y_1, y_2 , tj. OR je oblika

$$y = c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2 \quad (3.3)$$

gdje je $\{y_1, y_2\}$ tvore *bazu rješenja*. Budući radi se o funkcijama čija je zajednička domena $i = (a, b)$, dovoljno je provjeriti je li njihov kvocijent $y_1(x)/y_2(x) = \text{const}$. AKO NIJE, ONDA JESU, tj. ako je njihov kvocijent nekonstantna funkcija, tada su rješenja linearno nezavisna.

Fiksiranjem vrijednosti integracijskih konstanti c_1, c_2 dobivamo iz općeg rješenja (3.3) *partikularno rješenje*.

Cauchyjeva zadaća (problem početnog uvjeta) je sistem

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1, \quad x \in I. \quad (3.4)$$

Naravno, (3.4) predstavlja JEDNU ravninsku krivulju na intervalu I koja prolazi točkom $T(x_0, K_0)$, dok tangenta na tu krivulju u istoj točki ima koeficijent pravca jednak K_1 .

3.1. Homogena DJ drugoga reda s konstantnim koeficijentima. Imamo naslov, ako se radi o jednadžbi oblika

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (3.5)$$

gdje su p, q realne konstante. Potražimo rješenje DJ (3.5) u obliku $y = e^{\lambda x}$. (Zašto baš u takvom)? Bit će $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, što uvrštavanjem u (3.5) daje takozvanu *karakterističnu jednadžbu* DJ:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (3.6)$$

Odatle je

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad D = p^2 - 4q.$$

Dobili smo DVA rješenja DJ (3.5):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Nastaju tri moguća slučaja, ovisno o predznaku diskriminante karakteristične jednačbe (3.6).

3.1.1. $D > 0$, dva različita realna rješenja. Sada

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

čine bazu DJ (3.5); to možemo provjeriti i sugeriranim kriterijem – kvocijent $y_1(x)/y_2(x) = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$ nije konstanta, jer su $\lambda_1 \neq \lambda_2$. To ujedno znači da je OR superpozicija rjev senja

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Primjer 3.1. Riješi problem početnog uvjeta

$$y'' + 3.7y' = 0, \quad y(-2) = 4, \quad y'(-2) = 0.$$

Nalazimo rješenja karakteristične jednačbe $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3.7$, ujedno je OR

$$y = c_1 + c_2 e^{-3.7x}.$$

Kako je $y' = -3.7c_2 e^{-3.7x}$ uvrštavanjem početnih uvjeta u y, y' dobivamo sistem linearnih jednačbi po c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} -3.7c_2 e^{7.4} &= 0 &\rightarrow c_2 &= 0 \\ c_1 + c_2 e^{7.4} &= 4 &\rightarrow c_1 &= 4 \end{aligned}$$

Rješenje ovog Cauchyjevog zadatka je $y = 4$. \square

3.1.2. $D = 0$, dvostruko realno rješenje. Jedno rješenje (3.5) je

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Kriterij nezavisnosti bazičnih rješenja sugerira da postoji neka realna funkcija $w = w(x)$ takva, da je $y_2 = w \cdot y_1$. Slijedi $y_2' = w'y_1 + wy_1$, $y_2'' = w''y_1 + 2w'y_1' + wy_1''$. Zamijenimo te vrijednosti u (3.5) i sredimo dobivenu jednačbu po derivacijama funkcije w :

$$w''y_1 + w'(2y_1' + py_1) + w(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0,$$

gdje se oba izraza u zagradama anuliraju – prvi zbog $y_1' = -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}$, drugi jer predstavlja cijelu lijevu stranu jednačbe (3.5). Na taj je način nova jednačba

$w'' = 0$, tj. $w(x) = c_1 + c_2x$. Za drugo nezavisno bazično rješenje biramo najjednostavniju moguću linearnu funkciju – to je $w(x) = x$. Stoga je

$$y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Dakle, OR je

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{p}{2}x}. \quad (3.7)$$

Primjer 3.2. Riješi Cauchyjevu zadaću

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y'(0) = 14, \quad y(0) = -4.$$

Kako je $\lambda_{1,2} = -3$, baza rješenja je skup $\{e^{-3x}, xe^{-3x}$; OR je $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$. Iz početnih uvjeta lako dobivamo da je $(c_1, c_2) = (-4, 2)$, tj.

$$y = 2(x - 2)e^{-3x}. \quad \square$$

3.1.3. $D < 0$, kompleksno konjugirana rješenja. Sada su po pretpostavci rješenja karakteristične jednačbe kompleksno konjugirana, tj.

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + i\omega, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -\frac{p}{2} - i\omega, \quad \omega = \frac{\sqrt{-D}}{2}.$$

Baza rješenja DJ je sada kompleksna – $\{e^{-\frac{p}{2}x+i\omega x}, e^{-\frac{p}{2}x-i\omega x}\}$. Bazu ćemo sada transformirati u realnu, koristeći osobine superpozicije rješenja DJ i čuvenu Eulerovu formulu (čitaj: Ojler), koja glasi:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Dokazat ćemo Eulerovu formulu. Ako označimo desnu stranu (3.8) s $f(x)$, lako vidimo da je

$$f'(x) = -\sin x + i \cos x = i \left(\cos x - \frac{1}{i} \sin x \right) = i (\cos x + i \sin x) = i f(x).$$

Dobivena DJ separira varijable, a polazni početni uvjet je $f(0) = 1$. OR ove DJ je $f(x) = ce^{ix}$, a intergacijska konstanta je $c = 1$. Time je dokazana Eulerovu formulu pomoću ODJ.

Koristeći poznate transformacijske formule

$$\sin(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}, \quad \cos(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$$

imajući na umu da je

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{p}{2}x+i\omega x} = e^{-\frac{p}{2}x} (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)), \\ y_2 &= e^{-\frac{p}{2}x-i\omega x} = e^{-\frac{p}{2}x} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)), \end{aligned}$$

biramo novu bazu rješenja

$$\left\{ \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2i} \right\} = \left\{ e^{-\frac{p}{2}x} \cos(\omega x), e^{-\frac{p}{2}x} \sin(\omega x) \right\}.$$

Odista, i nova baza ima nezavisna rješenja, naime, njihov kvocijent je jednak $\cot(\omega x)$, što očito nije konstanta ako se x mijenja unutar nekog intervala $I = (a, b)$. OR sistema (3.5) evidentno je

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} (c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)). \quad (3.9)$$

Primjer 3.3. Riješi problem

$$y'' - 6y' + 18y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

Odmah vidimo da je $\omega = \sqrt{q - p^2/4} = 3$, dakle imamo OR u obliku

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} (c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)).$$

Kako je $y(0) = c_1 = 0$ i $y'(0) = -\frac{p}{2}c_1 + 3c_2 = 6$, dobivamo $(c_1, c_2) = (0, 2)$. Traženo partikularno rješenje je

$$y = 2e^{-\frac{p}{2}x} \sin(3x). \quad \square$$

4. Sistemi ODJ

Da bi mogli jednostavno analizirati, diskutirati i rješavati sisteme ODJ, koristimo elemente matičnog računa, linearne algebre gdje spadaju i vektori. Pro-matrat ćemo sisteme dviju jednadžbi od dvije nepoznate funkcije oblika

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdje je ulazni podatak matrica

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Matrični račun je apsolviran dovoljno detaljno u Matematici 1. Napominjemo da je inverzna matrica \mathbf{A}^{-1} zadane kvadratne, regularne ($|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$) matrice, matrica koja zadovoljava uvjet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, gdje je potonja matrica tzv. jedinična matrica (jedinice na glavnoj dijagonali - "lijevo-odozgo, nadolje-desno", sve ostale nule) istoga reda kao i ulazna matrica \mathbf{A} . Bit će

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Novi su pojmovi: **i.** deriviranje/integriranje matrice - matične funkcije, tj. matrice čiji su elementi funkcije i **ii.** svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrice.

Matričnu funkciju deriviramo tako, što joj deriviramo svaki element ponaosob:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad \int \mathbf{y}(t) dt = \begin{pmatrix} \int y_1(t) dt \\ \int y_2(t) dt \end{pmatrix}.$$

To je sve o derivaciji i primitivnoj funkciji. Za izračun određenog integrala matrične funkcije koristimo slavnu Newton–Leibnizovu formulu:

$$\int_a^b \mathbf{y}(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(t) dt \\ \int_a^b y_2(t) dt \end{pmatrix}.$$

Promatramo matričnu jednadžbu

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Rješenje je vektor $\mathbf{x} = 0$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$. Skalar λ za koji vrijedi (4.3) pri $\mathbf{x} \neq 0$, je *svojstvena vrijednost* matrice \mathbf{A} , dok je spomenuti vektor $\mathbf{x} \neq 0$ tzv. *svojstveni vektor* matrice \mathbf{A} .

Prepisujemo (4.3) u ekvivalentan oblik

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0.$$

Da bi ovaj homogeni sistem linearnih algebarskih jednadžbi imao nenulto (tzv. netrivialno) rješenje, determinanta sistema mora biti jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |\mathbf{A}| = 0. \quad (4.4)$$

Ovo je *karakteristična jednadžba matrice* \mathbf{A} . Njena rješenja λ_1, λ_2 predstavljaju svojstvene vrijednosti \mathbf{A} . Uvrstimo u (4.3) redom $\lambda_{1,2}$ i rješavamo dobivene sisteme po \mathbf{x} . Kako je determinanta sistema jednaka nuli, redovi matrice sistema \mathbf{A} moraju biti proporcionalni, tj. dovoljno je uzeti prvu jednadžbu za nalaženje svakog svojstvenog vektora:

$$(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 = 0. \quad (4.5)$$

Sljeduju svojstveni vektori $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$.

Primjer 4.1. Nađi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba je $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. Sada za $\lambda = \lambda_1 = 2$ sistem (4.5) postaje:

$$-x_1 + x_2 = 0$$

čije je jedno rješenje $x_1 = x_2 = 1$. Zaista, kako je $(x_1, x_1)^T = x_1(1, 1)^T$, dovoljno je uzeti vektor $(1, 1)^T$ za $\mathbf{x}^{(1)}$, jer je parametar x_1 redundantan. Slično dobivamo za $\lambda = \lambda_2 = 1$:

$$x_2 = 0.$$

Odatle zbog $(x_1, 0)^T = x_1(1, 0)^T$ biramo $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 0)^T$. \square

Prepisujući homogeni sistem s konstantnim koeficijentima (4.1) u matričnom obliku, dobivamo analogno jednodimenzionalnom slučaju:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}. \quad (4.6)$$

Pripadno OR je

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}^{(2)}. \quad (4.7)$$

I sada definiramo Cauchyjev zadatak, za nalaženje konstanti c_1, c_2 , odnosno za jedinstvenu krivulju iz skupa krivulja u ravnini $0y_1y_2$.²

Primjer 4.2. Nastavljajući Primjer 4.1. dobivamo da je OR homogenog sistema ODJ $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ oblika

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

²Oblici krivulja opisanih familijom rješenja (4.7) su vrlo raznorodni i ovise o prirodi rješenja karakteristične jednadžbe matrice \mathbf{A} , kao i o prirodi rješenja sistema (4.5) koji rezultira svojstvenim vektorima. Tako postoje rješenja koje sadrže i opisuju *čvor*, *sedlastu točku*, *središte/centar*, *spiralnu točku*. Više o tome u E. Kreyszig, AEM, §4.3.

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

5. Uvod u LT

Pierre–Simon Laplace (1749–1827) (čitaj: pjEr simOn laplAs) razvio je metodu rješavanja DJ kojim se "teški" problem (sama DJ) prevodi u "laganiji", u algebarski. Sada DJ rješavamo algebarskim transformacijama. Nakon transformiranja rješenja u pogodne izraze, vraćamo se u analizu, u oblast u kojoj je DJ zadana. Tamo donosimo zaključke o rješenju zadanog problema. Matematički alat za taj *tamo–amo* postupak je Laplaceova transformacija (LT).

5.1. Definicija i osnovne osobine LT. Neka je $f: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Ako postoji (u općem slučaju nepravi) integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (5.1)$$

nazivamo ga *Laplaceova transformacija funkcije f*; to skraćeno pišemo

$$F(s) = \mathcal{L}_s[f].$$

To, da nova funkcija ovisi o argumentu s , naznačili smo s $F(s)$. Originalna funkcija je f , dok je njena *slika* $F(s)$. Ako nam je kojim slučajem zadana slika F , a tražimo original, to pišemo:

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f(x).$$

Ovdje se radi o *inverznoj Laplaceovoj transformaciji funkcije F*. Standardna je procedura označiti original malim, a sliku odgovarajućim velikim slovom: $y \leftrightarrow Y, f \leftrightarrow F$.

Kod Laplaceove transformacije često imamo posla s takozvanom Eulerovom funkcijom druge vrste, koju nazivamo i *gama funkcija*:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad \Re\{p\} > -1. \quad (5.2)$$

Neke od jednostavnijih osobina gama funkcije su:

1. $\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$;
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$;

3.

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} dx.$$

Primjer 5.1. Izračunaj $\mathcal{L}_s[x^\alpha]$, $\alpha \geq 0$. Po definiciji je

$$\mathcal{L}_s[x^\alpha] = \int_0^\infty e^{-sx} x^\alpha dx = \int_0^\infty e^{-sx} x^{(\alpha+1)-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Specificiranjem $\alpha = 0, 1, 2$ dobivamo redom:

$$\mathcal{L}_s[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}_s[x] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}_s[x^2] = \frac{2}{s^3}.$$

Teorem 3 (Linearnost LT). *Ako f, g imaju Laplaceove slike, tada vrijedi*

$$\mathcal{L}_s[af + bg] = a\mathcal{L}_s[f] + b\mathcal{L}_s[g] \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Dokaz ovog teorema nije težak, naime, kako je Laplaceova transformacija integral, a integral je linearan operator, takav je operator i Laplaceova transformacija. Naravno, odatle slijedi i *linearnost inverzne Laplaceove transformacije* $\mathcal{L}^{-1}[F]$. Naime, posljedica Teorema 3 je:

$$\mathcal{L}^{-1}[aF + bG] = a\mathcal{L}^{-1}[F] + b\mathcal{L}^{-1}[G] \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Primjer 5.2. Formulu

$$\mathcal{L}_s[e^{ax}] = \frac{1}{s-a} \quad a \geq 0 \quad (5.5)$$

izvodimo direktnim izračunavanjem.

No, možemo je iskoristiti i za nalaženja originala $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F]$, LT $F(s)$, ako je slika zadana u obliku:

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b.$$

Pretpostavimo da je $a < b$. Na osnovu (5.4) imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \right] \\ &= \frac{1}{a-b} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-a} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-b} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a-b} (e^{ax} - e^{bx}). \quad \square \end{aligned}$$

LT polinoma i eksponencijalne funkcije lako smo našli. Sada navodimo još neke često korištene LTE. Tako vrijedi

$$\mathcal{L}_s[\sin(\omega x)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5.6)$$

$$\mathcal{L}_s[\cos(\omega x)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}_s[\sinh(\omega x)] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}_s[\cosh(\omega x)] = \frac{s}{s^2 - \omega^2}. \quad (5.9)$$

Dokaz ovih formula također nije naročito težak. Prvo koristimo

$$\mathcal{L}_s[e^{i\omega x}] = \int_0^\infty e^{-(s-i\omega)x} dx = \frac{1}{s - i\omega}.$$

Racionaliziramo nazivnik, zatim odredimo realan i imaginaran dio rezultata, što zajedno s Eulerovom formulom (3.8) daje (5.6) i (5.7). Imajući u vidu definicije funkcija \sinh , \cosh , kao i formulu (5.5), dobivamo (5.8) i (5.9) preko teorema linearnosti LT.

5.2. Koje funkcije imaju LT. ³ Po definiciji je

$$\mathcal{L}_s[f] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx.$$

Ako je $f(x)$ dio po dio neprekidna funkcija na \mathbb{R}_+ , tj. ima najviše prebrojivo mnogo konačnih skokova – prekida prve vrste na tom skupu, a između tih prekida je neprekidna, te ako je zadovoljen uvjet *eksponencijalne ograničenosti*:

$$|f(x)| \leq M e^{\gamma x} \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (5.10)$$

za neke konstante M, γ , tada integral $\mathcal{L}_s[f]$ konvergira (odnosno $|\mathcal{L}_s[f]| < \infty$), i kažemo da postoji LT $\mathcal{L}_s[f] = F(s)$ funkcije f , postoji za svako $s > \gamma$.

Doista, kako je

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_s[f]| &= \left| \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \right| \leq \int_0^\infty e^{-sx} |f(x)| dx \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-(s-\gamma)x} dx = \frac{M}{s - \gamma} < \infty, \end{aligned}$$

prethodni rezultat je izveden.

Napomena 1. *Ako postoji LT $\mathcal{L}_s[f]$ za neku funkciju f , tada je ona jedinstvena. Također, ako vrijedi $\mathcal{L}_s[f] = \mathcal{L}_s[g]$, tada na svakom intervalu pozitivne duljine su i originalni jednaki: $f = g$, unatoč tome što u izoliranim točkama \mathbb{R}_+ one se mogu razlikovati. No, u primjenama to nema neku veliku važnost, jer ako dvije neprekidne funkcije imaju jednake LT, tada su one identične.*

³Matematički: Egzistencija LT.

5.3. LT derivacije funkcije.

Teorem 4. Neka je $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ (tj. neka ima neprekidnu prvu derivaciju) i neka zadovoljava uvjet (5.10) za neke M, γ . Tada

$$\mathcal{L}_s[f'] = s\mathcal{L}_s[f] - f(0+) \quad s > \gamma. \quad (5.11)$$

Nije teško pokazati valjanost ovog rezultata. Naime, po definiciji je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[f'] &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx = e^{-sx} f(x) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\ &= -f(0+) + s\mathcal{L}_s[f], \end{aligned}$$

gdje smo posljednju implikaciju izveli na osnovu uvjeta ograničenosti $|f(x)| \leq Me^{\gamma x}$.

Primijenimo li (5.11) na LT od druge derivacije neke funkcije f , nakon kraćeg računanja dobivamo

$$\mathcal{L}_s[f''] = s^2\mathcal{L}_s[f] - sf(0+) - f'(0+). \quad (5.12)$$

Ako dodatno pretpostavimo da je $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$, tada je

$$\mathcal{L}_s[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}_s[f] - s^{n-1}f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.13)$$

5.4. Primjene LT na ODJ. Promatramo Cauchyjev zadatak/problem početnog uvjeta:

$$y'' + py' + qy = r(x), \quad y(0) = K_0, \quad y'(0) = K_1. \quad (5.14)$$

Ovdje su p, q realne konstante, a $r(x), x \geq 0$ ulazni signal primijenjen na dinamički sistem $y(x)$ na (istoj) domeni \mathbb{R}_+ .

1. korak. Označimo $Y = \mathcal{L}_s[y]$, $R = \mathcal{L}_s[r]$, i primijenimo LT na zadanu jednadžbu (5.14):

$$(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + p(sY - y(0)) + qY = R.$$

Sređivanjem po Y izlazi

$$Y(s) = \frac{(s+p)K_0 + K_1 + R(s)}{s^2 + ps + q} = [(s+p)K_0 + K_1 + R(s)]H(s), \quad (5.15)$$

gdje se funkcija $H(s) = (s^2 + ps + q)^{-1}$ naziva *prijenosna/transferna funkcija sistema* y .

2. korak. Prikazuje se (5.15) u pogodnom obliku, najčešće u obliku zbroja pravih razlomaka, tako da pomoću tablice Laplaceovih transformacija (vidi §5.1.) nalazimo PR $y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y]$.

Primjer 5.3. Riješi Laplaceovom transformacijom Cauchyjev zadatak

$$y'' - 4y' + 3y = 2x - \frac{8}{3}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{16}{3}.$$

Primijenimo postupak predložen prije nekoliko trenutaka; prvi korak rezultira s

$$(s^2Y - sy(0) - y'(0)) - 4(sY - y(0)) + 3Y = \mathcal{L}_s[2x - 8/3] = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{3s}.$$

Nakon sređivanja i zamjene početnih uvjeta dobivamo da je

$$Y(s) = -\frac{2(8s^2 + 4s - 3)}{3s^2(s^2 - 4s + 3)} = -\frac{2(8s^2 + 4s - 3)}{3s^2(s - 1)(s - 3)}.$$

Razlažemo $-3Y(s)/2$ na prave razlomke:

$$-3Y(s)/2 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s - 1} + \frac{D}{s - 3},$$

odakle slijedi SLAJ po A, B, C, D s proširenom matricom

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

čije je rješenje $A = 0, B = -1, C = -D = -9/2$. Dakle:

$$Y(s) = \frac{2}{3s^2} + \frac{3}{s - 1} - \frac{3}{s - 3}.$$

Nakon, koristimo formule (5.4), (5.5) i transformaciju potencije:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - 1}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - 3}\right] \\ &= \frac{2x}{3} + 3(e^x - e^{3x}). \quad \square \end{aligned}$$

Primjer 5.4. Riješi Laplaceovom transformacijom Cauchyjev zadatak

$$y'' + y = 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$

Zadatak rješavamo predloženim postupkom BEZ OBZIRA što se on odnosi na početne uvjete u nuli, a sadašnji uvjeti su pomaknuti u $x_0 = \pi/4$. Dakle, primjenom LT na zadanu jednadžbu te sređivanjem proizilazi

$$Y(s) = \frac{2}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{sy(0)}{s^2 + 1} + \frac{y'(0)}{s^2 + 1}.$$

Inverzna Laplaceova transformacija, njena linearnost (vidi (5.4)) te formule (5.6), (5.7) daju OR oblika

$$y(x) = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2 + 1)}\right] + y(0) \cos x + y'(0) \sin x$$

$$\begin{aligned}
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right] + y(0)\cos x + y'(0)\sin x \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + y(0)\cos x + y'(0)\sin x \\
&= 2x + y(0)\cos x + (y'(0) - 2)\sin x \\
&= 2x + A\cos x + B\sin x,
\end{aligned}$$

gdje konstante A, B određujemo iz početnih uvjeta zadatka definiranih u $x_0 = \pi/4$. Nakon kraćeg računa slijedi $A = -B = 1$, odnosno

$$y(x) = \cos x - \sin x + 2x. \quad \square$$

5.5. LT određenog integrala. Neka je f dio po dio neprekidna funkcija koja zadovoljava uvjet eksponencijalne ograničenosti

$$|f(x)| \leq Me^{\gamma x} \quad x \in \mathbb{R}_+$$

za neke pozitivne konstante M, γ . Promatramo određeni integral

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt;$$

g je neprekidna funkcija (kao primitivna funkcija dio po dio neprekidne funkcije). Nadalje, vrijedi

$$|g(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq M \int_0^x e^{\gamma t} dt = \frac{M}{\gamma} (e^{\gamma x} - 1) < \frac{M}{\gamma} e^{\gamma x},$$

dakle, i g je eksponencijalno ograničena funkcija s istim $\gamma > 0$. Kako je $g'(x) = f(x)$ osim u točkama prekida funkcije f , i g' je dio po dio neprekidna funkcija, na osnovu LT derivacije:

$$\mathcal{L}_s[f] = \mathcal{L}_s[g'] = s\mathcal{L}_s[g] - g(0).$$

No, kako je $g(0) = 0$, bit će $\mathcal{L}_s[f] = s\mathcal{L}_s[g]$, odakle slijedi

$$\mathcal{L}_s\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}_s[f] \quad s > \gamma. \quad (5.16)$$

Primijenimo li inverznu LT na (5.16), koristeći oznaku $F(s) = \mathcal{L}_s[f]$ odmah je

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_0^x f(t) dt. \quad (5.17)$$

Primjer 5.5. Nađi f ako je

$$\mathcal{L}_s[f] = \frac{1}{s^2 + as}.$$

Očigledno je zadatak namijenjen upotrebi formule (5.17). Prvo uočavamo da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-ax}.$$

Prema tome

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+a}\right] = \int_0^x e^{-at} dt = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}). \quad \square$$

5.6. Translacijski teoremi. Već znamo da je LT linearna transformacija, da LT derivacije dovodi do množenja slike $F(s)$ sa s , da LT određenog integrala znači dijeliti sa s sliku originalnog signala/podintegralne funkcije $F(s)$. Sada transliramo sliku $F(s)$ duž s -osi, a također uvodimo i poznati *fazni pomak* argumenta x u inicijalnom signalu $f(x)$.

Teorem 5. *Neka je $\mathcal{L}_s[f] = F(s)$, $s > \gamma$. Tada*

$$\mathcal{L}_s[e^{ax}f(x)] = F(s-a) \quad s > a + \gamma. \quad (5.18)$$

Ovaj rezultat dobivamo po definiciji. Naime,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[e^{ax}f(x)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx}[e^{ax}f(x)] dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x}f(x) dx = \mathcal{L}_{s-a}[f] = F(s-a). \end{aligned}$$

Stoga, također vrijedi formula

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{ax}f(x). \quad (5.19)$$

Koristeći ove rezultate izvodimo sljedeće važne osobine:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s[e^{ax}x^n] &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{L}_s[e^{ax}\cos(\omega x)] &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}, \\ \mathcal{L}_s[e^{ax}\sin(\omega x)] &= \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Primjer 5.6. Riješi Cauchyjev zadatak

$$4y'' - 4y' + 37y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.5.$$

Primjenom LT na zadanu ODJ dobivamo

$$Y(s) = \frac{6(2s-1)}{4s^2 - 4s + 37}.$$

Kako je

$$4s^2 - 4s + 37 = 4(s - 1/2)^2 + 36 = 4[(s - 1/2)^2 + 3^2],$$

transformiramo $Y(s)$ u pogodan oblik:

$$Y(s) = 3 \frac{s - 1/2}{(s - 1/2)^2 + 3^2},$$

odakle je $a = 1/2$, $\omega = 3$, te je

$$y(x) = 3 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s - 1/2}{(s - 1/2)^2 + 3^2} \right] = 3e^{x/2} \cos(3x). \quad \square$$

Primjer 5.7. Nađi OR u problemu početnog uvjeta

$$y'' + 2y' - 8y = -256x^3, \quad y(0) = 15, \quad y'(0) = 36.$$

Nije teško vidjeti da je pomoćna jednadžba oblika

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{15s^5 + 66s^4 - 1536}{s^4(s^2 + 2s - 8)} = \frac{(15s^3 + 36s^2 + 48s + 192)(s^2 + 2s - 8)}{s^4(s^2 + 2s - 8)} \\ &= \frac{15}{s} + \frac{36}{s^2} + \frac{48}{s^3} + \frac{192}{s^4}. \end{aligned}$$

Prema tome

$$y(x) = 15 + 36x + 24x^2 + 32x^3. \quad \square$$

Sada uvodimo *fazni pomak* inicijalnog signala za neko $a \geq 0$, tj. promatramo funkciju $f(x - a)$ i tražimo njenu LT u terminima $F(s)$.

Teorem 6. Ako je $\mathcal{L}_s[f] = F(s)$, tada je

$$\mathcal{L}_s[\tilde{f}(x)] = e^{-as} F(s), \quad (5.20)$$

gdje je

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ f(x - a) & x \geq 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Dakle, ako znamo LT $F(s)$, tada možemo lako naći LT funkcije (5.21), čiji je argument pomaknut *fazno* u smjeru pozitivnog dijela $0x$ osi (a je nenegativan!) tako, da uzimamo umnožak $e^{-as} F(s)$.

Uz ovaj rezultat uvodimo i pojam *jedinične odskočne funkcije* (JOF), *step - funkcije* (tako je naziva Srđan), ili jednostavno *Heaviside-ove funkcije* (HF) (čitaj: hEvisajd):

$$u(x - a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \quad (5.22)$$

koje definiramo za neko $a \geq 0$. To je funkcija koja je do a jednaka nuli, u $x = a$ ima skok veličine 1, pa tako nastavlja biti jedinica *odavde, pa do vječnosti*.⁴

⁴Još jedan hommage Franku Sinatri, kojega je učinio odista poznatim tek Sid Vicious.

Odmah primjećujemo da je

$$\tilde{f}(x) = f(x-a)u(x-a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ f(x-a) & x \geq a. \end{cases} \quad (5.23)$$

Primjenom zadnje relacije imamo novi zapis Teorema 6:

Teorem 7 (Nova varijanta (5.20)). *Pod uvjetima prethodnog teorema je*

$$\mathcal{L}_s[f(x-a)u(x-a)] = e^{-as}F(s), \quad (5.24)$$

štoviše

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(x-a)u(x-a). \quad (5.25)$$

Ako se zapitamo, kako izgleda LT JOF, dovoljno je u (5.24) uzeti $f \equiv 1$:

$$\mathcal{L}_s[u(x-a)] = \left\{ \int_0^a + \int_a^\infty \right\} e^{-sx}u(x-a) dx = \int_a^\infty e^{-sx} dx = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

Primjer 5.8. Nađi original LT, ako je

$$F(s) = \frac{as+b}{(s+c)^2 + \omega^2}.$$

Prvi teorem translacije primjenjujemo na zbroj

$$F(s) = a \frac{s+c}{(s+c)^2 + \omega^2} + \frac{b-ac}{\omega} \frac{\omega}{(s+c)^2 + \omega^2}.$$

U oba razlomka je fazni pomak $-c$, uobičajena frekvencija je ω , dakle:

$$f(x) = e^{-cx} \left(a \cos(\omega x) + \frac{b-ac}{\omega} \sin(\omega x) \right). \quad \square$$

Primjer 5.9. Pomoću drugog teorema translacije nađi original $g(x)$, ako je

$$G(s) = \frac{e^{-\pi x}}{s^2 + 2s + 2}.$$

Odmah vidimo da je $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$, i

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right] = e^{-x} \sin x.$$

Sada argument moramo translirati udesno za π , tj.

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \begin{cases} 0 & x < \pi \\ e^{-(x-\pi)} \sin(x-\pi) & x \geq \pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < \pi \\ -e^{\pi-x} \sin x & x \geq \pi \end{cases}. \quad \square$$

Često imamo posla sa funkcijom koja je jednaka jedinici na intervalu $x \in [a, b]$, dok je izvan toga jednaka nuli.⁵ Nju lako zapisujemo preko JOF u obliku:

$$\chi_{[a,b]}(x) = u(x-a) - u(x-b) \quad a < b. \quad (5.26)$$

Primjer 5.10. Riješi Cauchyjev zadatak

$$y'' + 4y = r(x) = \begin{cases} 3 \sin x & x \in (0, \pi) \\ -3 \sin x & x \geq \pi \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

Pomoću formule (5.26) je

$$\begin{aligned} r(x) &= 3\chi_{(0,\pi)}(x) \cdot \sin x - 3\chi_{[\pi,\infty)}(x) \cdot \sin x \\ &= 3(u(x) - u(x-\pi)) \sin x - 3u(x-\pi) \sin x \\ &= 3u(x) \sin(x) - 6u(x-\pi) \sin x. \end{aligned}$$

Nadalje, zbog $\sin x = -\sin(x-\pi)$, bit će

$$R(s) = \mathcal{L}_s[r] = 3\mathcal{L}_s[u(x) \sin x] + 6\mathcal{L}_s[u(x-\pi) \sin(x-\pi)] = \frac{3}{s^2+1} + \frac{6e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Tako iz

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4Y = R(s)$$

slijedi

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3}{s^2+4} + \frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{6e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+1} - \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}, \end{aligned}$$

odakle je

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = 2[1 - u(x-\pi)] \sin(2x) + [1 + 2u(x-\pi)] \sin x. \quad \square$$

5.7. LT Diracove delta funkcije. Promatramo funkciju

$$f_h(t) = \begin{cases} 1/h & a \leq x \leq a+h \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

čiji je graf konstantan na visini od $1/h$, na intervalu duljine h , tako da formira pravokutnik površine 1. Laplaceova transformacija $f_h(x)$ je

$$\mathcal{L}_s[f_h] = \mathcal{L}_s\left[\frac{1}{h} (u(x-a) - u(x-a-h))\right] = e^{-as} \frac{1 - e^{-hs}}{hs}. \quad (5.27)$$

Označimo

$$\delta(x-a) := \lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = \begin{cases} \infty & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

⁵To je tzv. *karakteristična funkcija intervala* $[a, b]$, pišemo je $\chi_{[a,b]}(x)$, ili $\mathcal{I}_{[a,b]}(x)$.

i dobili smo jednu "funkciju" koja se zove *Diracova delta – funkcija* (čitaj: di-rAk). Preko L'Hôpitalovog (čitaj: lopitAl) teorema zaključujemo da je

$$\mathcal{L}_s[\delta(x - a)] = e^{-as}. \quad (5.28)$$

Takodjer se (geometrijski savim zorno) vidi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1.$$

Primjer 5.11. Riješi problem početnih uvjeta

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(x - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

Uzimamo LT čitave zadane jednadžbe:

$$(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + 4(sY - y(0)) + 5Y = (s^2 + 4s + 5)Y - 3 = e^{-s}.$$

Odatle je

$$Y(s) = \frac{3}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{e^{-s}}{(s + 2)^2 + 1}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(x) &= 3e^{-2x} \sin x + \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-s} \frac{1}{(s + 2)^2 + 1} \right] \\ &= 3e^{-2x} \sin x + e^2 u(x - 1) \sin(x - 1). \quad \square \end{aligned}$$

5.8. Derivacija i integral LT. Već je ranije bilo apostrofirano da od originalnog signala f zahtjevamo "lijepo ponašanje", eksponencijalnu ograničenost:

$$|f(x)| \leq Me^{\gamma x} \quad x > 0, \quad \text{za neke } M, \gamma > 0.$$

Tada, derivirajući po s LT $F(s)$ funkcije f , dobivamo:

$$F'(s) = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-sx}) f(x) dx = - \int_0^{\infty} e^{-sx} [xf(x)] dx = -\mathcal{L}_s[xf(x)],$$

odnosno vrijedi

$$\mathcal{L}_s[xf(x)] = -F'(s), \quad \mathcal{L}^{-1}[F'] = -xf(x). \quad (5.29)$$

Nekoliko osnovnih formula dobivenih deriviranjem LT su:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] &= \frac{1}{2\omega^3} (\sin(\omega x) - \omega x \cos(\omega x)) \\ \mathcal{L}_s \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] &= \frac{1}{2\omega} \sin(\omega x) \\ \mathcal{L}_s \left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] &= \frac{1}{2\omega} (\sin(\omega x) + \omega x \cos(\omega x)). \end{aligned}$$

Pod pretpostavkom eksponencijalne ograničenosti polaznog signala f vrijede sljedeće dvije formule:

$$\mathcal{L}_s \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \int_s^\infty F(t) dt \quad s > \gamma, \quad (5.30)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\int_s^\infty F(t) dt \right] = \frac{f(x)}{x}. \quad (5.31)$$

Zaista, imamo da je

$$F(t) = \mathcal{L}_t[f] = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx,$$

odnosno

$$\int_s^\infty F(t) dt = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-tx} f(x) dx \right] dt = \int_0^\infty f(x) \left[\int_s^\infty e^{-tx} dt \right] dx.$$

Sada, kako unutrašnji integral rezultira sa e^{-sx}/x , kada je $s > \gamma$, slijedi (5.30).

Primijetimo da se ove transformacije mogu koristiti u rješavanju ODJ s funkcionalnim koeficijentima, vidi Kreyszig §6.6.

LANCI MARKOVA. MARKOVLJEVI PROCESI

6. LANAC MARKOVA

6.1. Markovsko svojstvo. Promatramo niz ponavljanja eksperimenata. Ako uspjeh u pojedinim ponavljanjima zavisi od realizacije nekoliko prethodnih ishoda (tj. nekoliko uzastopnih ishoda prilikom ponavljanja eksperimenta bitno utječe na sljedeći ishod u nizu), tada se javlja takozvana *Markovska zavisnost* u nizu. Ishode možemo promatrati kao slučajne događaje, ili realizacije slučajnih varijabli.

Nešto preciznije, promatramo neki fizički sistem \mathcal{S} definiran na skupu $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, i fiksiran vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Neka su X_n slučajne varijable na $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ koje pridružujemo \mathcal{S} u $n \in \mathbb{N}_0$. Vrijednost argumenta n nazivamo *vremenski trenutak*, dok je x_n , vrijednost varijable X_n *stanje sistema* \mathcal{S} . Dakle skup vrijednosti $R_{\mathcal{S}} = \{x_1, x_2, \dots\}$ niza $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ je *skup stanja* \mathcal{S} . *Evolucija/razvoj* sistema \mathcal{S} je niz x_1, x_2, \dots , a opisuje se s nizom X_1, X_2, \dots .

Definicija 1. *Kažemo da je $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ lanac Markova prvog reda ili da među članovima niza $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ postoji Markovska zavisnost prvog reda, ako za svaki skup vremenskih trenutaka m, n_1, \dots, n_r za koje vrijedi $0 \leq n_r < n_{r-1} < \dots < n_1 < m$ i svaki skup $\{x_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$ od $r + 1$ stanja sistema \mathcal{S} vrijedi:*

$$\mathbb{P}(X_m = x_j | X_{n_1} = x_{i_1}, \dots, X_{n_r} = x_{i_r}) = \mathbb{P}(X_m = x_j | X_{n_1} = x_{i_1}). \quad (6.1)$$

Ako pak vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_m = x_j | X_{n_1} = x_{i_1}, \dots, X_{n_r} = x_{i_r}) \\ = \mathbb{P}(X_m = x_j | X_{n_1} = x_{i_1}, \dots, X_{n_q} = x_{i_q}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

gdje je $q < r$, onda je riječ o lancu Markova reda q .

Trenutak n_1 je *sadašnjost*, m je *budućnost* \mathcal{S} , dok su stanja x_{n_2}, \dots, x_{n_r} u *prošlosti*. Dakle, Markovska zavisnost promatra zavisnost budućiosti sistema \mathcal{S} od prošlosti. Očito kod lanca Markova prvog reda prošlost i budućnost su nezavisne.

$$\begin{array}{cccccc}
n_r < & \cdots & < n_2 & < n_1 & < m \\
\downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
X_{n_r} = x_{i_r} & \cdots & X_{n_2} = x_{i_2} & X_{n_1} = x_{i_1} & | & X_m = x_j \\
\text{Prošlost} & \cdots & \text{Prošlost} & \text{Sadašnjost} & & \text{Budućnost}
\end{array}$$

Primjer 1. Pisani tekst \mathcal{T} možemo promatrati kao neki fizički sistem, koji se mijenja na slučajan način. Označimo jedno mjesto u tekstu s 0. Pomjeranje za jedno mjesto udesno neka je 1 vremenski trenutak. Sistem \mathcal{T} ima onoliko stanja koliko ima slovnih znakova + razmak između riječi + koliko je interpunkcijskih znakova. Tako je sam tekst jedan niz slučajnih varijabli X_0, X_1, X_2, \dots , počev od fiksiranog, nultog mjesta pa nadalje. No kako je

$$P(X_2 = o | X_1 = t, X_0 = \mathfrak{s}), \quad \text{riječ što ,}$$

mnogo veća nego što je na primjer

$$P(X_2 = o | X_1 = t, X_0 = k), \quad \text{riječ kto ,}$$

ili na primjer

$$P(X_2 = o | X_1 = t, X_0 = t) = 0 ,$$

očigledno moramo potražiti Markovsku zavisnost višeg reda da bi mogli prikazati realno stanje u hrvatskom tekstu. Napominjemo da engleski jezik ima zavisnost od 8-10 slova unazad.

6.2. Homogeni lanac Markova.

Definicija 2. Neka je X_n , $n \in \mathbb{N}_0$ lanac Markova prvog reda na prostoru vjerojatnosti $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Vjerojatnost prijelaza iz stanja x_i u stanje x_j u trenutku m je

$$p_{ij}(n, m) = P(X_m = x_j | X_n = x_i), \quad 0 \leq n < m . \quad (6.3)$$

Ako je $p_{ij}(n, m) = p_{ij}(m - n)$, lanac Markova je homogen.

Promatrajući vjerojatnosti prijelaza $p_{ij}(n, m) = p_{ij}(m - n)$ homogenog lanca Markova pada nam u oči činjenica da je taj broj invarijantan u odnosu na vremensku translaciju, tj. ako je $\ell \in \mathbb{N}$, bit će $p_{ij}(n + \ell, m + \ell) = p_{ij}(n, m)$, po definiciji. Stoga za homogene lance $p_{ij}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ bit će oznaka za vjerojatnosti prijelaza iz stanja x_i u stanje x_j u n koraka, tj. za n vremenskih trenutaka. Zbog jednostavnosti pisat ćemo $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Matrica prijelaznih vjerojatnosti za n koraka $\mathbf{P}_n = (p_{ij}(n))$, $i, j \in \mathbb{N}$, dok je $\mathbf{P}_1 = (p_{ij})$, $i, j \in \mathbb{N}$ matrica prijelaza za 1 korak. Matrice \mathbf{P}_n , $n \in \mathbb{N}$ su

stohastičke, tj. svi elementi su nenegativni i suma elemenata po recima je 1, tj.

$$p_{ij}(n) \geq 0, \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij}(n) = 1 .$$

Teorem 8. Neka je \mathbf{P}_n matrica vjerojatnosti prijelaza nekog zadanog lanca Markova. Tada vrijedi (jednadžbe Chapman - Kolmogorov)

$$p_{ij}(n) = \sum_{\text{po svim stanjima } k} p_{ik}(m)p_{kj}(n-m), \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad (6.4)$$

odnosno u matičnom obliku

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_1^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.5)$$

Proof. Označimo sljedeće slučajne događaje:

A – sistem \mathcal{S} iz x_i prelazi u x_j u n koraka

B_k – sistem \mathcal{S} iz x_i prelazi u x_k u m koraka ,

također je evidentno da je $\sum_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$. Bit će

$$\mathbf{P}(A) = p_{ij}(n), \quad \mathbf{P}(B_k) = p_{ik}(m), \quad \mathbf{P}(A|B_k) = p_{kj}(n-m) .$$

Sada iz teorema o totalnoj vjerojatnosti

$$\mathbf{P}(A) = \sum_k \mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(A|B_k)$$

slijedi da je za svaki čvrsti (fiksirani) $m \in \mathbb{N}$ na snazi jednakost

$$p_{ij}(n) = \mathbf{P}(X_{m+n} = x_j | X_n = x_i) = \sum_{\text{po svim stanjima } k} p_{ik}(m)p_{kj}(n-m), \quad i, j \in \mathbb{N} .$$

Time je dokaz (6.4) završen. Ova relacija u matičnom obliku glasi

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{P}_{n-m} . \quad (6.6)$$

Odatle, za $m = 1$ lako slijedi da je $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{P}_1^2 \cdot \mathbf{P}_{n-2} = \dots = \mathbf{P}_1^n$, što je i ujedno druga tvrdnja teorema. \square

Bernoullijeva shema je također homogeni lanac Markova, s matricom prijelaza

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix} .$$

Zaista, neka su stanja promatranog sistema $A, \mathcal{C}(A)$ i $p_{11} = \mathbf{P}(A|A) = p$. Prema tome je $p_{22} = \mathbf{P}(\mathcal{C}(A)|\mathcal{C}(A)) = q$. Kako je \mathbf{P}_1 stohastička matrica slijedi da je $p_{12} = 1 - p = q$, $p_{21} = 1 - q = p$.

Kratak i ne naročito težak račun nam daje

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1^2 = \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} p^2 + pq & pq + q^2 \\ p^2 + pq & pq + q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1$$

odakle slijedi da je $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_1$.

6.3. Stacionaran lanac Markova. Povratna i nepovratna stanja. Zadan je homogeni lanac Markova $X_j, j \in \mathbb{J}$ na čvrstom prostoru vjerojatnosti $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ koji opisuje evoluciju nekog fizičkog sistema \mathcal{S} . Neka je X_0 stanje sistema \mathcal{S} u trenutku 0, i neka je $p_j(0) = \mathbf{P}(X_0 = x_i)$ vjerojatnost stanja x_j u nultom, početnom trenutku, dok neka je $p_j(n)$ vjerojatnost stanja x_j u trenutku n . Opet na osnovi teorema o totalnoj vjerojatnosti imamo

$$p_j(n) = \sum_k p_k(n-1)p_{kj}, \quad j, n \in \mathbb{N}, \quad (6.7)$$

koja formula ima jednostavan opis. Sistem se nalazi u stanju x_k u trenutku $n-1$, i u sljedećem koraku/trenutku mora stići u stanje x_j . Budući da je x_k takozvano "tekuće stanje", sumiramo po svim takvim x_k stanjima, odnosno, po svim mogućim indeksima k .

Definicija 3. *Homogeni lanac Markova je stacionaran, ako je*

$$p_j(n) = p_j(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (6.8)$$

za svako stanje $x_j, j \in \mathbb{N}$.

Najjednostavniji je slučaj konačnog broja stanja $R_{\mathcal{S}} = \{x_1, \dots, x_m\}$. Početne vjerojatnosti $p_j = p_j(0), j = \overline{1, m}$ određuju se iz sistema

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m p_k p_{kj} &= p_j, & j &= \overline{1, m} \\ \sum_{k=1}^m p_k &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (S^*)$$

Neka je nadalje $q_{ij}(n)$ vjerojatnost PRVOG prijelaza sistema \mathcal{S} iz stanja x_i u stanje x_j . Očigledno je

$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} q_{ij}(n),$$

vjerojatnost slučajnog događaja - \mathcal{S} bar jednom pređe iz stanja x_i u stanje x_j .

Definicija 4. *Stanje x_j je povratno, ako je $Q_{jj} = 1$, dok je stanje x_j nepovratno ako je $Q_{jj} < 1$.*

Sljedeći jednostavan kriterij govori o određivanju kvalitete stanja (povratno/nepovratno) homogenog lanca Markova.

Teorem 9. Stanje x_j lanca Markova je povratno (nepovratno) ovisno od toga da li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$$

divergira (konvergira).

Proof. Na osnovi teorema o totalnoj vjerojatnosti imamo da je

$$p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^n q_{ij}(m)p_{jj}(n-m), \quad n \in \mathbb{N}, \quad p_{jj}(0) = 1,$$

odnosno za neki prirodan broj n_0 dobivamo sumirajući prethodne vjerojatnosti n_0 - te parcijalne sume

$$\sum_{n=1}^{n_0} p_{ij}(n) = \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{m=1}^n q_{ij}(m)p_{jj}(n-m) = \sum_{n=1}^{n_0} q_{ij}(n) \sum_{m=n}^{n_0} p_{jj}(n-m). \quad (6.9)$$

Prilikom ocjenjivanja n_0 - te parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$ koristimo procjene dobivene iz (6.9) za neko $n_1 < n_0$:

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{n_0-n_1} p_{jj}(n)\right) \sum_{n=1}^{n_1} q_{ij}(n) \leq \sum_{n=1}^{n_0} p_{ij}(n) \leq \left(1 + \sum_{n=1}^{n_0} p_{jj}(n)\right) \sum_{n=1}^{n_0} q_{ij}(n).$$

Podijelimo zadnju relaciju s

$$1 + \sum_{n=1}^{n_0} p_{jj}(n)$$

i prelaskom na limes prvo kada n_0 , zatim kada $n_1 \rightarrow \infty$, dobivamo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{ij}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N p_{ij}(n)}{1 + \sum_{n=1}^N p_{jj}(n)},$$

a to znači da je

$$Q_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} q_{jj}(n) = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)}.$$

Dakle, ako red $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$ divergira, to čini ka $+\infty$, prema tome $Q_{jj} = 1$, što znači da se radi o povratnom stanju sistema \mathcal{S} . Ako je pak spomenuti red konvergentan, bit će $Q_{jj} < 1$, tj. stanje x_j je nepovratno. \square

Vrijedi sljedeći rezultat, kojim možemo precizirati ponašanje sistema s obzirom na vrste stanja sistema. Inače taj rezultat je u uskoj vezi s lemom Borel - Cantelli.

Teorem 10. *Ako je homogeni lanac Markova u nekom koraku u povratnom stanju, tada za beskonačno mnogo koraka beskonačno mnogo puta se vraća u to stanje. Ako je u nepovratnom stanju, onda za beskonačno mnogo koraka najviše konačno mnogo puta se vraća u to stanje, a u konačno mnogo koraka ne vraća se u to stanje.*

6.4. Slučajno gibanje po pravcu - *random walk*. Promatramo česticu koja se kreće po cjelobrojnim točkama pravca, i koja svakog trenutka mijenja položaj tako da s vjerojatnosti $p \in (0, 1)$ realizira prijelaz $j \mapsto j + 1$, dok je vjerojatnost koraka ulijevo $q = 1 - p$. Očito je skup stanja ovog sistema $R_S = \mathbb{Z}$. Vjerojatnosti prijelaza bit će

$$p_{ij} = \begin{cases} p & j = i + 1 \\ q & j = i - 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} . \quad (6.10)$$

Ako se radi o *slučajnom gibanju s odbojnom barijerom*, prethodni model će se adaptirati na skup stanja $R_S = \{1, 2, \dots, m\}$, s tim da je $p_{mm} = p$, $p_{11} = q$, tj. matrica prijelaza je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & p \end{pmatrix} .$$

Možemo povezati slučajno gibanje s Bernoullijevom shemom. Neka je A slučajan događaj s vjerojatnosti $P(A) = p$. Lako nalazimo da je

$$p_{jj}^{(m)} = \begin{cases} 0 & m = 2n + 1 \\ \binom{2n}{n} p^n q^n & m = 2n \end{cases} . \quad (6.11)$$

Koristeći Stirlingovu formulu ⁶ nalazimo da je asimptotsko ponašanje vjerojatnosti (6.11) u slučaju parnog broja koraka

$$p_{jj}(2n) = \binom{2n}{n} p^n q^n \sim \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi n n^n e^{-n}})^2} p^n q^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4pq)^n,$$

gdje je $4pq \leq 4 \max_{(0,1)} p(1-p) = 1$, a jednakost se dostiže za $p = q = .5$. No posljednja procjena potvrđuje ekvikonvergenciju redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (4pq)^n.$$

A po Teoremu 9. stanje j je nepovratno ako je $p \neq .5$, dok je samo u slučaju $p = .5$ stanje sistema slučajnog gibanja po pravcu povratno.

Taj zaključak smo i mogli očekivati, jer ako je $p > .5$, tada su vjerojatnija pomjeranja udesno nego ulijevo, što bi ujedno značilo i pokoji povratak prema/u početno stanje, ali za veliki broj koraka čestica ode udesno i ne vraća se (za $p < .5$ priča se blago pomiče ulijevo). Napokon, za $p = .5$ čestica oscilira oko stanja j .

6.5. Ergodički teorem za lance Markova. Vrlo je zanimljivo pitanje kako se ponaša vjerojatnost prijelaza $p_{ij}(n)$ kod homogenih lanaca Markova s konačnim brojem stanja $R_S = \{1, 2, \dots, s\}$, kada je broj koraka n veoma velik, tj. kada $n \rightarrow \infty$. U slučaju kada postoje neke zakonitosti u asimptotskom ponašanju $\mathbf{P}^n = (p_{ij}(n))$, $n \in \mathbb{N}$, kao na primjer ustaljenost, postojanje limesa, tada možemo vrlo uspješno aproksimirati $p_{ij}(n)$ s konstantnom vjerojatnosti.

Teorem 11. *Neka je homogeni lanac Markova X_1, X_2, \dots definiran na prostoru vjerojatnosti $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ posjeduje konačan broj stanja, tj. neka je $R_S = \{1, 2, \dots, s\}$. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav, da vrijedi*

$$\min_{1 \leq i, j \leq s} p_{ij}(n_0) = \delta > 0 \quad (6.12)$$

ili ako su svi elementi matrice vjerojatnosti prijelaza \mathbf{P}_{n_0} pozitivni, tada vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j^*, \quad j = \overline{1, s} \quad (6.13)$$

gdje p_j^* ne ovisi o prvom indeksu i vjerojatnosti prijelaza.

Dokaz ovog teorema neću navesti, no dat ću jednu njegovu posljednicu, koja ima praktičan karakter, kojim odmah ocjenjujemo bliskost zaokruženja $p_{ij}(n) \approx p_j^*$ u zavisnosti od n, s i δ .

⁶Stirlingova formula daje asimptotsko ponašanje faktoriijela, naime $n! \sim \sqrt{2\pi n} (ne^{-1})^n$, kada je n veliko.

Teorem 12. Pod uvjetima prethodnog teorema neka za čvrsto $j \in \mathbb{N}$ i neko N vrijedi

$$d = \min_{1 \leq i \leq s} p_{ij}(N) > 0, \quad (6.14)$$

tj. matrica vjerojatnosti prijelaza za N koraka \mathbf{P}_N ima najmanje jednu kolonu nenultih elemenata, tada je minimalni n , za koji se postiže

$$\max_{1 \leq i, j \leq s} |p_{ij}(n) - p_j^*| < \eta$$

gdje je $\eta > 0$ unaprijed zadana pogreška aproksimacije, određen s

$$n \geq \left\lceil N \left(\frac{\ln \frac{\eta}{2\sqrt[s]{s}}}{\ln(1-d)} + 1 \right) \right\rceil + 1, \quad (6.15)$$

dok je r proizvoljan realan broj takav da je $r \geq 1$.

Vjerojatnosti p_j^* , $j = \overline{1, s}$ su takozvane *finalne/ergodičke vjerojatnosti*. Preostala je još metoda određivanja ergodičkih vjerojatnosti. Naime, na osnovi jednadžbi Chapman - Kolmogorov imamo da je:

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^s p_{ik}(n-1)p_{kj}.$$

Prelaskom na limes kada $n \rightarrow \infty$ dobivamo

Teorem 13. Ergodičke vjerojatnosti p_j^* homogenog lanca Markova s konačnim brojem stanja zadovoljavaju sistem linearnih algebarskih jednadžbi

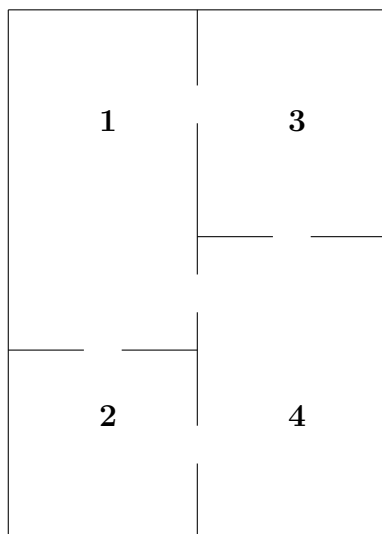
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^s p_k^* p_{kj} = p_j^*, & j = \overline{1, s} \\ \sum_{k=1}^s p_k^* = 1 \end{cases}. \quad (6.16)$$

Što znači taj teorem? Evolucija homogenog lanca Markova s konačnim brojem stanja ne ovisi o dalekoj prošlosti, tj. stanje x_i fizičkog sistema \mathcal{S} , koji je opisan s takvim lancem kao modelom, ne utječe na ponašanje sistema u stanju x_j ako je broj koraka u kojem vršimo prijelaz $x_i \mapsto x_j$ veliki. Tada u slučaju homogenosti finalne vjerojatnosti poklapaju se sa stacionarnim vjerojatnostima, dakle ergodičan lanac se ponaša kao stacionaran:

$$p_{ij}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_j \approx p_j^*, \quad j = \overline{1, s},$$

bez obzira na polazno stanje x_i .

Primjer 2. Muha leti iz sobe u sobu, u svakom koraku mijenja sobe. Promjena sobe događa se s podjednako vjerojatnim ishodima. Tlocrt stana vidljiv je na sljedećoj slici.



- (1) Naći početnu matricu vjerojatnosti prijelaza \mathbf{P}_1 lanca Markova koji opisuje let muhe. Pokazati homogenost lanca Markova.
- (2) Odrediti \mathbf{P}_2 .
- (3) Odrediti ergodičku vjerojatnost p_4^* .

- (1) Nije teško uvidjeti da je lanac homogen. Zaista, skup stanja je $R_{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3, 4\}$ za lanac X_1, X_2, \dots . Kako prijelazne vjerojatnosti $P(X_{n+1} = i | X_n = j)$ ne ovise o trenutku n , homogenost je evidentna. Inače, lako nalazimo da je

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (2) Također, bez problema nalazimo da je

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1^2 = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & 1/9 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix},$$

odnosno svi elementi $p_{ij}^{(2)}$ su pozitivni. Dakle vektor ergodičnih vjerojatnosti postoji na osnovi teorema 11.

- (3) Na osnovi teorema 13, postavljamo sistem linearnih algebarskih jednadžbi (6.16), koji dobiva sređeni oblik

$$\begin{aligned} -p_1^* + \frac{1}{2}p_2^* + \frac{1}{2}p_3^* + \frac{1}{3}p_4^* &= 0 \\ \frac{1}{3}p_1^* - p_2^* + \frac{1}{3}p_4^* &= 0 \\ \frac{1}{3}p_1^* - p_3^* + \frac{1}{3}p_4^* &= 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}p_1^* + \frac{1}{2}p_2^* + \frac{1}{2}p_3^* - p_4^* &= 0 \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* &= 1,\end{aligned}$$

i čije je rješenje

$$p_1^* = p_4^* = .3, \quad p_2^* = p_3^* = .2.$$

Možemo zaključiti da se nakon velikog broja promjena soba muha nalazi u prostoriji 4 s vjerojatnosti .3.

7. PROCES MARKOVA

7.1. Proces Markova s prebrojivo mnogo stanja. Promatramo fizički sistem \mathcal{S} koji se razvija/evoluiru u vremenskom intervalu duljine $t \geq 0$. Radi jednostavnosti, neka je to interval $t \in [0, \infty)$. Ako fiksiramo neko $t = t_0$, ponašanje sistema \mathcal{S} opisano je slučajnom varijablom diskretnog tipa $X(t_0)$ koju definiramo na čvrstom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, i to tako da $X(t_0)$ uzima vrijednosti iz skupa stanja $\mathbf{R}_{\mathcal{S}} = \{x_1^0, x_2^0, \dots\}$. Promatramo sada familiju slučajnih varijabli $\{X(t) : t \geq 0\}$ koju dobivamo variranjem "tekućeg" argumenta t ; spomenutu familiju odsad nazivamo *slučajan proces*. Radi jednostavnosti umjesto $\{X(t) : t \geq 0\}$ pisat ću $X(t)$, bez gubljenja općenitosti.

Definicija 5. *Slučajan proces $X(t)$ je proces Markova s prebrojivo mnogo stanja x_1, x_2, \dots , ako za svaki niz trenutaka $t > t_1 > \dots > t_n$ i svaki niz od $n+1$ stanja $x_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ vrijedi*

$$\mathbf{P}(X(t) = x_j | X(t_1) = x_{i_1}, \dots, X(t_n) = x_{i_n}) = \mathbf{P}(X(t) = x_j | X(t_1) = x_{i_1}) \quad (7.1)$$

Označimo s $p_{ij}(t)$ vjerojatnost prijelaza iz stanja x_i u stanje x_j za vrijeme t . Proces $X(t)$ je homogen, ako je za svako čvrsto $t > 0$, $i, j \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(X(t+s) = x_j | X(s) = x_i) = p_{ij}(t), \quad \forall t, s > 0,$$

odnosno uvjetna vjerojatnost (7.1) ne ovisi o trenucima promatranja, nego isključivo o duljini trajanja intervala promatranja.

U našem slučaju uvijek vrijedi

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}. \quad (7.2)$$

U ovom dijelu izlaganja promatrat ćemo isključivo homogene procese Markova.

7.2. Jednadžbe Chapman - Kolmogorov. Slično kao kod lanaca Markova dobivamo Chapman - Kolmogorovljeve jednadžbe, sada u obliku koji je prilagođen promatranom modelu slučajnog procesa $X(t)$ koji promatramo na vremenskom intervalu $t \in [0, \infty)$. Koristeći oznake uvedene u prethodnom potpoglavlju, slijedi

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k: \text{ po svim stanjima}} p_{ik}(s)p_{kj}(t), \quad (7.3)$$

gdje $i, j \in \mathbb{N}$; $t, s > 0$. Nije teško uvidjeti da red (7.2) konvergira za sve vrijednosti $t, s > 0$. Zaista, vrijedi

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t) \leq \sum_k p_{ik}(s) = 1, \quad (7.4)$$

jer promatrani sistem iz x_i može prijeći isključivo u stanja iz \mathbf{R}_S . Budući da je druga suma u relaciji (7.4) u stvari

$$\mathbb{P}(X(s+r) \in \mathbf{R}_S | X(r) = x_i) = \mathbb{P}(\Omega),$$

za neko čvrsto $r > 0$, koje smo mogli odabrati po volji zbog homogenosti procesa, konvergencija reda na desnoj strani (7.2) je dokazana.

Uvodimo matricu prijelaznih vjerojatnosti procesa Markova

$$\mathbb{P}(t) = (p_{ij}(t)); \quad \mathbb{P}(0) = \mathbb{E},$$

gdje je potonja matrica s elementima oblika (7.2), tj. \mathbb{E} je jedinična matrica. (Moram napomenuti da su $\mathbb{P}(t)$, \mathbb{E} beskonačne stohastičke matrice). Sada uzima matricni oblik

$$\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t) \cdot \mathbb{P}(s), \quad t, s \geq 0. \quad (7.5)$$

7.3. Vrijeme boravka sistema \mathcal{S} u stanju x_i . Neka je $X(0) = x_i$, što uvijek možemo pretpostaviti, budući $X(t)$ je homogeni proces Markova, dakle vremenska translacija ne utječe na njegovu evoluciju. Vremenski korak od trenutka 0 do trenutka τ_i kada $X(t)$ prvi puta promijeni stanje/napušta x_i je slučajna varijabla za koju vrijedi $\mathbb{P}(\tau_i \geq 0) = 1$. U ovom potpoglavlju nalazimo razdiobu slučajne varijable τ . U tom cilju označimo

$$G_i(t) = \mathbb{P}(\tau_i > t), \quad t \geq 0. \quad (7.6)$$

(Ta funkcija je u stvari $1 - F_i(t)$, gdje je F_i tražena funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable τ_i). Budući da za neko $s > 0$ slučajan događaj

$$B = \{\omega : \tau_i \geq s\} \subseteq \{\omega : \tau_i \geq s+t\} = A,$$

na osnovi definicije uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$ dobivamo da vrijedi

$$\mathbb{P}(\tau_i \geq s+t) = \mathbb{P}(\tau_i \geq s+t | \tau_i \geq s)\mathbb{P}(\tau_i \geq s),$$

što zbog definicije (7.6) rezultira s

$$G_i(s+t) = G_i(t) \cdot G_i(s) . \quad (7.7)$$

Također zbog (7.6) odmah vidimo, da je $0 \leq G_i(0) \leq 1$. Dakle, rješenje funkcionalne jednadžbe (7.7) lako implicira funkciju razdiobe τ_i . Pretpostavimo da je funkcija G_i diferencijabilna. Tada se iz (7.7) odmah dobiva $G_i(t+\Delta t) = G_i(t)G_i(\Delta t)$, odnosno

$$\frac{G_i(t+\Delta t) - G_i(t)}{\Delta t} = \frac{G_i(\Delta t) - 1}{\Delta t} G_i(t) ,$$

što preko $\Delta t \rightarrow 0$ daje diferencijalnu jednadžbu

$$G_i'(t) = -\lambda_i G_i(t) , \quad (7.8)$$

gdje je

$$\lambda_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - G_i(\Delta t)}{\Delta t} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{G_i(\Delta t) - G_i(0)}{\Delta t} = -G_i'(0) . \quad (7.9)$$

Jednadžbu (7.8) lako rješavamo (jednadžba sa separacijom varijabli). Konstanta $\lambda_i = -G_i'(0)$ je takozvana *gustoća vjerojatnosti prijelaza iz stanja x_i* . Napokon je

$$F_i(t) = (1 - e^{-\lambda_i t}) \mathbb{I}_{[0, \infty)}(t) , \quad (7.10)$$

odnosno $\tau_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$, τ_i ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ_i . Lako nalazimo da je

$$\mathbb{E}\tau_i = \frac{1}{\lambda_i} .$$

Također nalazimo da je vjerojatnost da \mathcal{S} napusti x_i u vremenskom intervalu male duljine Δt jednaka

$$F_i(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) , \quad (7.11)$$

gdje je $o(\Delta t)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na Δt , tj. $o(\Delta t) \rightarrow 0$, ako $\Delta t \rightarrow 0$; pritom smo koristili oznaku Landau.

Parametar λ_i zaslužuje posebnu pažnju. Prvo, prilikom izračunavanja vjerojatnosti da sistem \mathcal{S} promijeni stanje x_i u vremenskom intervalu dužine $\Delta t \rightarrow 0$, uzimajući prva dva člana McLaurinovog razvoja funkcije razdiobe, slijedi

$$F_i(\Delta t) = F_i(0) + F_i'(0)\Delta t + o(\Delta t) = -G_i'(0)\Delta t + o(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) ,$$

odnosno izveli smo formulu

$$F_i(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) . \quad (7.12)$$

Prema vrijednosti λ_i klasificiramo stanja procesa Markova kao:

- (1) $\lambda_i \in (0, \infty)$, x_i zadržava \mathcal{S} . Tada je vrijeme boravka u x_i aproksimativno $\mathbf{E}\tau_i = \lambda_i^{-1}$.
- (2) $\lambda_i = 0$, x_i je apsorbirajuće stanje; \mathcal{S} ostaje u x_i s vjerojatnosti 1.
- (3) $\lambda_i = \infty$, x_i je trenutno stanje, jer ga \mathcal{S} odmah napušta.

7.4. Sistemi diferencijalnih jednadžbi Kolmogorova. Pretpostavimo da vjerojatnosti prijelaza $p_{ij}(t)$, procesa Markova $X(t)$ koji ima prostor stanja $\mathbf{R}_{\mathcal{S}} = \{x_1, \dots, x_m\}$, zadovoljavaju uvjete

$$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j, \quad (7.13)$$

$$p_{jj}(\Delta t) = 1 - \lambda_j\Delta t + o(\Delta t), \quad i = j. \quad (7.14)$$

U gornjim relacijama su konstante

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0),$$

gustoće vjerojatnosti prijelaza i očito je $\lambda_{jj} = -\lambda_j$. Inače fizičko objašnjenje relacija (7.13), (7.14) je sljedeće. Vjerojatnost da \mathcal{S} promijeni stanje $x_i \mapsto x_j$ u vremenskom intervalu duljine $\Delta t \rightarrow 0$ je direktno proporcionalno duljini intervala, dok sistem \mathcal{S} ostaje u stanju x_i s velikom (blizu 1) vjerojatnosti.

U primjenama najčešće tražimo λ_{ij} . Budući da je $\mathbf{E}\tau_j = \lambda_j^{-1}$, a iz matematičke statistike je poznato da je takozvani *maximum likelihood procjenitelj* $\hat{\lambda}_j$ matematičkog očekivanja parametra eksponencijalne razdiobe dobiven iz uzorka $\tau_j^{(1)}, \dots, \tau_j^{(n)}$ opsega, tj. dužine n oblika

$$\hat{\lambda}_j = \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \tau_m^{(j)} \right)^{-1} = \frac{1}{(\tau_j)_n}, \quad (7.15)$$

analogno nalazimo da je

$$\hat{\lambda}_{ij} = \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \tau_m^{(i,j)} \right)^{-1} = \frac{1}{(\tau_{i,j})_n}, \quad (7.16)$$

gdje je $\tau_m^{(i,j)}$ element uzorka dužine vremenskih intervala u kojem je izvršen prijelaz $x_i \mapsto x_j$, dok je $(\tau_{i,j})_n$ aritmetička sredina uzorka dužina istih vremenskih intervala. S druge strane, ako znamo gustoće vjerojatnosti prijelaza λ_{ij} , možemo odrediti i vjerojatnosti prijelaza iz sljedećeg važnog teorema Kolmogorova.

Teorem 14 (SISTEM DIFERENCIJALNIH JEDANDŽBI KOLMOGOROVA). *Vjerojatnosti prijelaza procesa Markova s konačnim skupom stanja $\mathbf{R}_{\mathcal{S}} = \{x_1, \dots, x_m\}$*

zadovoljavaju sisteme diferencijalnih jednadžbi

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j = \overline{1, m} \quad \text{DIREKTAN SISTEM,} \quad (7.17)$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(t) \lambda_{kj}, \quad i, j = \overline{1, m} \quad \text{OBRATAN SISTEM,} \quad (7.18)$$

s početnim uvjetima $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ⁷.

Proof. Jednadžbe Chapman - Kolmogorov (7.2), one daju

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(\Delta t) p_{kj}(t).$$

Primjenjujći na to pretpostavke (7.13), (7.14) dobivamo da je

$$\begin{aligned} p_{ij}(t + \Delta t) &= \sum_{k \neq i}^m p_{ik}(\Delta t) p_{kj}(t) + p_{ii}(\Delta t) p_{ii}(t) \\ &= \sum_{k \neq i}^m (\lambda_{ik} \Delta t + o(\Delta t)) p_{kj}(t) + (1 - \lambda_{ii} \Delta t + o(\Delta t)) p_{ii}(t), \end{aligned}$$

odakle odmah slijedi da

$$\begin{aligned} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} &= \sum_{k \neq i} (\lambda_{ik} + o(1)) p_{kj}(t) + (\lambda_{ii} + o(1)) p_{ii}(t) \\ &= \sum_{k=1}^m (\lambda_{ik} + o(1)) p_{kj}(t). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Primjenom $\Delta t \rightarrow 0$ na (7.19), dobivamo direktni sistem Kolmogorova. Ako Chapman - Kolmogorova zapišem u obliku

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(t) p_{kj}(\Delta t),$$

i ponovim gornji postupak, slijedi obratni sistem. Teorem je dokazan. \square

U slučaju procesa Markova s prebrojivo mnogo stanja $\mathbf{R}_S = \{x_1, x_2, \dots\}$, vrijede analogni rezultati, osim što moramo uočiti nekoliko dodatnih problema u vezi s konvergencijom redova na desnoj strani (7.20), (7.21).

⁷Ovdje se radi o Kroneckerovom simbolu δ_{ij} jednakom 1 ako je $i = j$, a 0 je za $i \neq j$.

Teorem 15. *Vjerojatnosti prijelaza procesa Markova s prebrojivim skupom stanja $\mathbf{R}_S = \{x_1, x_2, \dots\}$ zadovoljavaju sisteme diferencijalnih jednačbi Kolmogorova*

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j \in \mathbb{N} \quad \text{DIREKTAN SISTEM}, \quad (7.20)$$

ako red $\sum_{k \neq i} \lambda_{ik}$ konvergira i $\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_i$.

Nadalje, ako su gustoće vjerojatnosti prijelaza uniformno ograničene, tj. $\lambda_{ij} \leq L$, tada vrijedi

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(t) \lambda_{kj}, \quad i, j \in \mathbb{N} \quad \text{OBRATAN SISTEM}. \quad (7.21)$$

U oba slučaja su početni uvjeti $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

7.5. Ergodički teorem za procese Markova. Stacionarnost. U potpunoj analogiji s lancima Markova s konačnim brojem stanja možemo ponoviti izvod rezultata teorema 11, 12 i 13.

Teorem 16. *Ako su kod procesa Markova $X(t)$ s m stanja $\mathbf{R}_S = \{x_1, \dots, x_m\}$ za neki čvrsti trenutak $t_0 \in [0, \infty)$ sve vjerojatnosti prijelaza $p_{ij}(t_0) > 0$, $i, j = \overline{1, m}$, onda*

$$p_{ij}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} p_j^*, \quad j = \overline{1, m} \quad (7.22)$$

bez obzira na početno stanje x_i .

Vjerojatnosti p_j^* su *finalne/ergodičke vjerojatnosti*. Njih dobivamo na osnovi "procesne" varijante teorema 13.

Teorem 17. *Ergodičke vjerojatnosti p_j^* homogenog procesa Markova s m stanja zadovoljavaju sistem linearnih algebarskih jednačbi*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^s p_k^* \lambda_{kj} = p_j^*, & j = \overline{1, s} \\ \sum_{k=1}^s p_k^* = 1 \end{cases} \quad (7.23)$$

Neka su nam poznate vjerojatnosti početnog stanja $P(X(0) = x_i) = p_i(0)$, $i \in \mathbb{N}$. Argumentacijom sličnom kao kod lanaca Markova, vjerojatnost da je proces u trenutku t u stanju x_i je

$$p_i(t) = \sum_{k: \text{ po svim stanjima } k} p_k(0) p_{ki}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (7.24)$$

Napokon, proces Markova je *stacionaran*, ako za sve prirodne indekse i vrijedi

$$p_i(t) = p_i(0) .$$

Stacionarne vjerojatnosti $p_i(0)$ se poklapaju s ergodičkim vjerojatnostima p_i^* , što znači da kod dovoljno duge evolucije sistema \mathcal{S} po vremenu proces Markova s konačnim brojem stanja asimptotski teži stacionarnom režimu, odnosno

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i^* , \quad (7.25)$$

za sve $i \in \{1, \dots, m\}$.

Primjer 3. Pozivi pristižu u telefonsku centralu prema procesu Poissona $X(t)$ s poznatim parametrom $\lambda > 0$. Neka je dužina razgovora slučajna varijabla $\tau \sim \mathcal{E}(\mu)$. Prostor stanja telefona je dvočlan $\mathbf{R}_X = \{0 - \text{slobodan}, 1 - \text{zauzet}\}$. Uzmimo da se poziv koji stiže za vrijeme razgovora ne može detektirati. Očigledno se radi o procesu Markova. Prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1$ nije teško odrediti. Bit će $p_{01}(t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, $p_{10}(t) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$. Nadalje, kako je $\mathbb{P}(t)$ stohastička matrica, bit će $p_{00}(t) = 1 - p_{01}(t)$, $p_{11}(t) = 1 - p_{10}(t)$. Iz obratnog sistema diferencijalnih jednačbi Kolmogorova imamo da je

$$p'_{00}(t) = \mu - (\lambda + \mu)p_{00}(t), \quad p'_{11}(t) = \lambda - (\lambda + \mu)p_{11}(t)$$

čija su rješenja (rubni uvjeti su $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$)

$$p_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_{11}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

dok preostale dvije vjerojatnosti lako nalazimo iz strukture $\mathbb{P}(t)$.