

Sadržaj

Interpolacija

Lagrangeov
interpolacioni
polinom

Račun konačnih
razlika

Newtonovi
interpolacijski
polinomi

Gaussovi
interpolacijski
polinomi

Inverzna
interpolacija

Numerička matematika

Interpolacija

Biserka Draščić Ban

Pomorski fakultet Rijeka

12. prosinca 2019.

Sadržaj

Interpolacija

Lagrangeov
interpolacioni
polinom

Račun konačnih
razlika

Newtonovi
interpolacijski
polinomi

Gaussovi
interpolacijski
polinomi

Inverzna
interpolacija

Sadržaj

1 Interpolacija

Lagrangeov interpolacioni polinom

Račun konačnih razlika

Newtonovi interpolacijski polinomi

Gaussovi interpolacijski polinomi

Inverzna interpolacija

Interpolacija

Na segmentu $[a, b]$ zadano je $n + 1$ točaka x_0, x_1, \dots, x_n (**čvorovi interpolacije**), kao i vrijednosti neke neprekidne funkcije $y = f(x) \in C[a, b]$ u tim točkama:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Takvo određivanje funkcije uglavnom zovemo *tabelarno*, dok je skup $\mathbb{U} = \{(x_j, y_j) : y_j = f(x_j), j = \overline{0, n}\}$ uzorak funkcije f .

Naša je zadaća procjena vrijednosti funkcije $f(\bar{x})$, kada je $\bar{x} \neq x_j$; **isključivo** na osnovu poznatih vrijednosti \mathbb{U} .

To postizemo nalaženjem pomoćne funkcije F , tzv. (**funkcije interpolacije**) koja pripada nekoj određenoj klasi funkcija, tako da vrijedi **interpolacijsko svojstvo**

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (1)$$

Dobivenu interpolacionu formulu $y = F(x)$ koristimo za izračunavanje vrijednosti funkcije f u točki \bar{x} tako da je rješenje zadatka zapravo aproksimacija

$$f(\bar{x}) \approx F(\bar{x}).$$

Ako F pripada skupu polinoma, dobivamo **interpolacijske polinome** koji će biti n -tog stupnja, budući $\#\mathbb{U} = n + 1$.

Ako je:

1. $\bar{x} \in [x_0, x_n]$, radi se o **interpolaciji**
2. \bar{x} van tog segmenta o **ekstrapolaciji**, koja može biti:
 - **ekstrapolacija unazad**, kada je $\bar{x} < x_0$
 - **ekstrapolacija unaprijed**, u slučaju $\bar{x} > x_n$

Lagrangeov interpolacioni polinom

Na segmentu $[a, b]$ zadan je uzorak $\mathbb{U} = \{(x_j, f(x_j)) : j = \overline{0, n}\}$.
Tražimo polinom maksimalno n -tog stupnja $\mathcal{L}_n(x)$ koji ima
interpolacijsko svojstvo

$$\mathcal{L}_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = \overline{0, n}. \quad (2)$$

Takav polinom je tzv. *Lagrangeov interpolacijski polinom*:

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(x) \cdot y_j}{(x - x_j) \Pi'_{n+1}(x_j)}, \quad (3)$$

gdje je

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Čvorovi interpolacije ne moraju biti ekvidistantni kod $\mathcal{L}_n(x)$; ovaj polinom može se koristiti u bilo kojem području unutar ili izvan $[x_0, x_n]$ za procjenu vrijednosti funkcije aproksimacijom

$$f(\bar{x}) \approx \mathcal{L}_n(\bar{x}).$$

Ocjena greške kod ovakvih aproksimacija funkcije $f \in C^{n+1}$ Lagrangeovim interpolacionim polinomom je

$$|R_n(\bar{x})| \leq \frac{\max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(\bar{x})|. \quad (4)$$

Račun konačnih razlika

Zadana je funkcija $y = f(x)$ i $\Delta x = h$ prirast nezavisne varijable kojeg zovemo **korak**.

1. **Razlika prvog reda** Δy je

$$\Delta_h y = f(x + h) - f(x).$$

2. **Razlika drugog reda** $\Delta^2 y$ definira se kao razlika prvog reda od razlike prvog reda, tj.

$$\begin{aligned}\Delta_h^2 y &= \Delta_h(\Delta_h y) = \Delta_h f(x + h) - \Delta_h f(x) \\ &= f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x).\end{aligned}$$

3. **Razlika n-tog reda** definira se rekurzivno sa

$$\Delta_h^n y = \Delta_h(\Delta_h^{n-1} y) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x + (n-j)h) \quad n = 2, 3, \dots$$

Po konvenciji uzimamo da je konačna razlika nultoga reda sama funkcija u točki promatranja: $\Delta_h^0 y = y(x)$.

Za izračunavanje konačnih razlika koriste se **tablice konačnih razlika**.

U njima su prikazane konačne razlike koje su sada računate ovisno o mjestu podatka u uređenom uzorku \mathbb{U} . Naime, neophodno indeksiranje predstavljamo sada u obliku

$$\Delta^k y_\ell = \Delta^{k-1} y_{\ell+1} - \Delta^{k-1} y_\ell \quad k, \ell + 1 = \overline{0, n}. \quad (5)$$

Horizontalna tablica razlika

Sadržaj

Interpolacija

Lagrangeov
interpolacioni
polinom

**Račun konačnih
razlika**

Newtonovi
interpolacijski
polinomi

Gaussovi
interpolacijski
polinomi

Inverzna
interpolacija

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	\vdots
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	\vdots	\vdots
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	\vdots	\vdots	\vdots
x_4	y_4	Δy_4	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_5	y_5	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Dijagonalna tablica razlika

Sadržaj

Interpolacija

Lagrangeov
interpolacioni
polinom

**Račun konačnih
razlika**

Newtonovi
interpolacijski
polinomi

Gaussovi
interpolacijski
polinomi

Inverzna
interpolacija

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Newtonovi interpolacijski polinomi

U uzorku

$\mathbb{U} = \{(x_j, y_j) : j = \overline{1, n}\}$ zadajemo tzv. *ekvidistantne čvorove* tj. udaljenost između čvorova interpolacije je konstantna. Neka je

$$x_j = x_{j-1} + h = \dots = x_0 + j \cdot h \quad j = \overline{1, n}.$$

Postoje dva oblika Newtonovih interpolacijskih polinoma:

- 1 Prvi Newtonov interpolacijski polinom
- 2 Drugi Newtonov interpolacijski polinom

Prvi Newtonov interpolacijski polinom

Potražimo interpolacijski polinom u obliku

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

Nepoznate koeficijente određujemo iz interpolacijskog svojstva $\mathcal{N}_n^{(1)}(x_j) = y_j, j = \overline{0, n}$. Zamjenom $x = x_j, j = \overline{0, n}$ u obje strane (6) direktno nalazimo:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Nekon kraćeg računanja dobivamo i da je

$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2 h^2},$$

odakle preko induktivne pretpostavke zaključujemo:

$$a_j = \frac{\Delta^j y_0}{j! h^j} \quad j = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Radi pojednostavljenja uvodimo i oznaku

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Budući da nam trebaju izrazi oblika $(x - x_j)/h$ izraženi u funkciji od q , bit će :

$$\frac{x - x_j}{h} = \frac{x - x_0}{h} - \frac{x_j - x_0}{h} = q - j \quad j = \overline{0, n-1};$$

skupljajući sve potrebne izraze u (6) napokon je

$$\mathcal{N}_n^{(1)}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (8)$$

Greška interpolacije kod prvog Newtonovog interpolacijskog polinoma, u slučaju poznavanja analitičkog izraza

$f \in C^{n+1}(V)$, $[x_0, x_n] \subseteq V$ je

$$|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - \mathcal{N}_n^{(1)}(\bar{x})| \leq h^{n+1} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{|\bar{q}(\bar{q}-1) \cdots (\bar{q}-n)|}{(n+1)!}, \quad (9)$$

gdje je

$$\bar{q} = \frac{\bar{x} - x_0}{h}.$$

Dodavanjem još jednog čvora x_{n+1} uzorku \mathbb{U} greška interpolacije procjenjuje se s

$$|R_n(\bar{x})| \leq \frac{|\Delta^{n+1} y_0 \bar{q}(\bar{q}-1) \cdots (\bar{q}-n)|}{(n+1)!}. \quad (10)$$

Drugi Newtonov interpolacijski polinom

Potražimo sada interpolacijski polinom počev od čvora x_n retrogradno u obliku

$$\mathcal{N}_n^{(2)}(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \cdots + b_n(x - x_n) \cdots (x - x_1). \quad (11)$$

Nepoznate koeficijente b_j određujemo iz interpolacijskog svojstva $\mathcal{N}_n^{(2)}(x_j) = y_j, j = \overline{0, n}$. Zamjenom $x = x_n, x = x_{n-1}, \dots, x = x_0$ u obje strane (11) dobivamo

$$b_0 = y_n, \quad b_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Nastavljajući postupak slijedi

$$b_j = \frac{\Delta y_{n-j}}{j! h^j} \quad j = \overline{0, n}. \quad (12)$$

U ovom slučaju je

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

što nam daje zaključak o vrijednosti

$$\frac{x - x_j}{h} = \frac{x - x_n}{h} + \frac{x_n - x_j}{h} = q + n - j \quad j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Vraćamo sve vrijednosti b_j zajedno s izračunatim transformiranim prirastima (13) u pretpostavljeni oblik drugog Newtonog interpolacijskog polinoma $\mathcal{N}_n^{(2)}(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n^{(2)}(x) &= y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} \\ &+ \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned} \quad (14)$$

gdje je

$$q = \frac{x - x_n}{h}. \quad (15)$$

Neka je $f \in C^{n+1}(W)$, $[x_0, x_n] \subseteq W$. Tada je greška kod drugog Newtonovog interpolacionog polinoma

$$|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - \mathcal{N}_n^{(2)}(\bar{x})| \leq h^{n+1} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{|\bar{q}(\bar{q}+1) \cdots (\bar{q}+n)|}{(n+1)!}, \quad (16)$$

dok ako u uzorku/tablici dodamo i čvor x_{n+1} tada je

$$|R_n(\bar{x})| \leq \frac{|\Delta^{n+1} y_0 \bar{q}(\bar{q}+1) \cdots (\bar{q}+n)|}{(n+1)!}; \quad (17)$$

u obje zadnje formule je

$$\bar{q} = \frac{\bar{x} - x_n}{h}.$$

Gaussovi interpolacijski polinomi

Neka je zadano $(2n + 1)$ čvorova:

$$x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n$$

gdje je

$$\Delta x_i = h = \text{const}$$

i

$$f(x_i) = y_i.$$

Gaussovi interpolacioni polinomi koriste se za sredinu tablice razlika.

Prvi Gaussov interpolacijski polinom

Označimo

$$q = \frac{x - x_0}{h} > 0$$

i polinom je:

$$\begin{aligned} G_{2n}^{(1)} = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots \\ & \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n+1} + \\ & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Drugi Gaussov interpolacijski polinom

Sada je

$$q = \frac{x - x_0}{h} < 0$$

i polinom je:

$$\begin{aligned} G_{2n}^{(2)} = & y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \dots \\ & \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ & + \frac{(q+n)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Greška je kod oba polinoma

$$|R_{2n}(\bar{x})| \leq \frac{h^{2n+1} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(2n+1)!} |\bar{q}(\bar{q}^2 - 1)(\bar{q}^2 - 2^2) \cdots (\bar{q}^2 - n^2)|.$$

Ovdje je

$$\bar{q} = \frac{\bar{x} - x_0}{h},$$

dok je \bar{x} onaj argument u kojem procjenjujemo nepoznatu vrijednost funkcije.

Inverzna interpolacija

Sadržaj

Interpolacija

Lagrangeov
interpolacioni
polinom

Račun konačnih
razlika

Newtonovi
interpolacijski
polinomi

Gaussovi
interpolacijski
polinomi

**Inverzna
interpolacija**

Neka je funkcija $y = f(x)$, koja je monotona, zadana tablično uzorkom \mathbb{U} .

Zadatak inverzne interpolacije je odrediti vrijednost argumenta \bar{x} ako je zadana vrijednost funkcije \bar{y} .

Pretpostavimo da je promatrani uzorak monoton po ordinatama i tako lagano lociramo mjesto gdje se nalazi u tablici \bar{y} ; mjesto pripadnog \bar{x} među **ekvidistantnim** čvorovima određuje koji od interpolacijskih polinoma $\mathcal{N}^{(1)}, \mathcal{N}^{(2)}, \mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}$ koristimo.

Postupak inverzne interpolacije (npr. na prvom Newtonovom interpolacionom polinomu)

$$\begin{aligned}\bar{y} = \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\dots(q-n+1).\end{aligned}$$

Izrazimo q iz pribrojnika linearnog po q :

$$q = \frac{\bar{y} - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2! \Delta y_0} q(q-1) - \dots - \frac{\Delta^n y_0}{n! \Delta y_0} q(q-1) \dots (q-n+1) =: \varphi(q); \quad (18)$$

što je iterativna funkcija.

Za početnu iteraciju q_0 uzimamo pribrojnik *slobodan od q*

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}, \quad (19)$$

a svaku sljedeću iteraciju računamo po uobičajenoj iterativnoj proceduri

$$q_{n+1} = \varphi(q_n).$$

Nakon m iteracija dobijemo da je

$$q_m \equiv \bar{q} \approx \frac{x - x_0}{h},$$

odnosno

$$\bar{x} \approx x_0 + h\bar{q}.$$

Pitanje: Kad stati s računanjem?

Iterativnu proceduru uputno je ponavljati do poklapanja određenog broja decimala kod uzastopnih iteracija, a taj broj je nužno bar za dva veći od broja decimala zadanih čvorova u \mathcal{U} .

Ako je \mathbb{U} zadan preko neekvidistantnih čvorova, koristimo Lagrangeov interpolacijski polinom i to tako, da izvršimo zamjenu $x \leftrightarrow y$ u (3):

$$\bar{x} = \sum_{j=0}^n \frac{\Pi_{n+1}(\bar{y}) \cdot y_j}{(\bar{y} - y_j) \Pi'_{n+1}(y_j)}, \quad (20)$$

odnosno u razvijenom obliku

$$\bar{x} = \frac{(\bar{y} - y_1) \cdots (\bar{y} - y_n)}{(y_0 - y_1) \cdots (y_0 - y_n)} x_0 + \cdots + \frac{(\bar{y} - y_0) \cdots (\bar{y} - y_{n-1})}{(y_n - y_0) \cdots (y_n - y_{n-1})} x_n. \quad (21)$$