Numerička matematika

Numeričko integriranje

Biserka Draščić Ban

Pomorski fakultet Rijeka

22. siječnja 2020.

Sadržaj

Numeričko integriranje

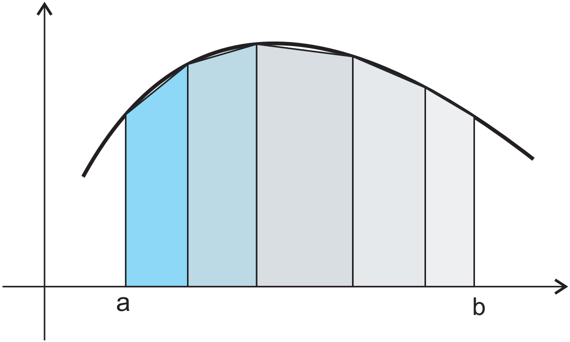
Ako je $F'(x) = f(x)$ onda je:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

U mnogim slučajevima primitivna funkcija se ne može naći pa izračunavanje po gornjoj formuli može biti teško ili nemoguće. Zbog toga su se pojavile metode za približno izračunavanje određenog integrala.

Trapezna formula

Svakako je najpoznatija formula numeričke integracije trapezna formula kod koje se podintegralna funkcija zamjenjuje po dijelovima linearnom funkcijom, pa tako elementi površine imaju oblik trapeza.



Slika: Trapezna formula

Ako je f neprekidna funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$, tad postoji barem jedna točka $\xi \in [a, b]$ za koju je

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)f(\xi).$$

No, ξ općenito ne možemo odrediti.

Podijelimo interval $[a, b]$ na n dijelova, točkama $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Na svakom od njih odaberimo $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Dobivamo približnu formulu za računanje integrala:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Podintervale možemo odabrati tako da imaju jednaku duljinu. Neka je $h = (b - a)/n$ i $x_i - x_{i-1} = h$ za svaki i. Onda dobivamo:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx h[f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)].$$

Ako je f integrabilna, onda osnovni teorem integralnog računa govori da će se smanjivanjem duljine h_n suma s desne strane približavati stvarnoj vrijednosti integrala.

Kad bismo znali dobro odabrati brojeve ξ_i, tad bi suma s desne strane dala točnu vrijednost integrala, **no mi ih ne znamo!** Imamo dvije mogućnosti:

1. Stavimo li $\xi = x_{i-1}$, time biramo lijevi kraj intervala i dobivamo tzv. lijevu sumu koju ćemo označiti s L_n:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx L_n := h[y_0 + \ldots + y_{n-1}].$$

2. Odaberemo li $\xi_i = x_i$, time biramo desni kraj intervala i dobivamo tzv. desnu sumu koju ćemo označiti s D_n:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx D_n := h[y_1 + \ldots + y_n].$$

Koja je od ovih formula bolja? O tome ne možemo općenito ništa reći. Možemo zato pokušati uzeti njihovu aritmetičku sredinu!

$$
\begin{aligned}
T_n = \frac{1}{2}(L_n + D_n) &= \frac{h}{2}[(y_0 + \ldots + y_{n_1}) + (y_1 + \ldots + y_n)] \\
&= \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + \ldots + y_{n-1})].
\end{aligned}
$$

Dakle, trapezna formula glasi:

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})],
$$

gdje je $h = x_n - x_{n-1}$.

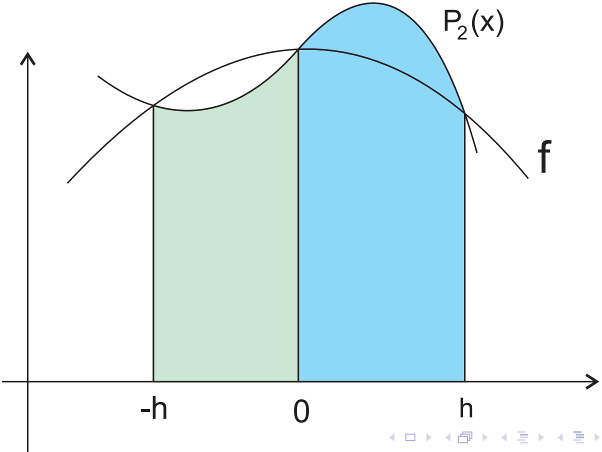
Greška metode je

$$|R(h)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Simpsonova formula

Zamijenimo li graf funkcije ne dijelovima pravca, već dijelovima parabole, očekujemo da ćemo dobiti precizniju formulu.

Neka su zadane vrijednosti funkcije y_0, y_2 na krajevima intervala duljine $2h$, te y_1 u sredini tog intervala. Kolika je površina ispod luka parabole koja prolazi tim točkama?



Neka se radi o intervalu $[-h, h]$, jer izbor intervala ne mijenja iznos površine.

Interpolacijski polinom drugog stupnja $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ čiji graf prolazi točkama $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$ možemo odrediti i elementarnim računom:

$$\begin{aligned} ah^2 - bh + c &= y_0, \\ c &= y_1, \\ ah^2 + bh + c &= y_2. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \\
b &= \frac{1}{2h}(y_2 - y_0), \\
c &= y_1
\end{aligned}
$$

pa je tražena jednadžba

$$f(x) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)x + y_1 .$$

Površina ispod grafa ove funkcije je:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Podijelimo sad interval $[a, b]$ na $2n$ dijelova. Stavimo $h = (b - a)/(2n)$. Na svaka susjedna dva dijela zamijenimo integral ovom formulom. Dobit ćemo Simpsonovu formulu:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})],$$

gdje je $h = x_n - x_{n-1}$.

Greška metode je:

$$|R| \le \frac{(b-a)h^4}{180}M, \quad M = \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|.$$